

Comportamiento en pequeña señal de las fuentes conmutadas

Introducción

Estudio en pequeña señal de modelos promedio

Ejemplo de promediado del circuito

Ejemplo con Pspice

Variables de estado

Equivalente promedio de los elementos de conmutación

Modelado de convertidores en conducción discontinua

Paradoja del promedio

Orden reducido

Orden completo

Modelo continuo

Simulación

Reguladores lineales

Ejemplo de diseño

Conclusiones y comentarios finales

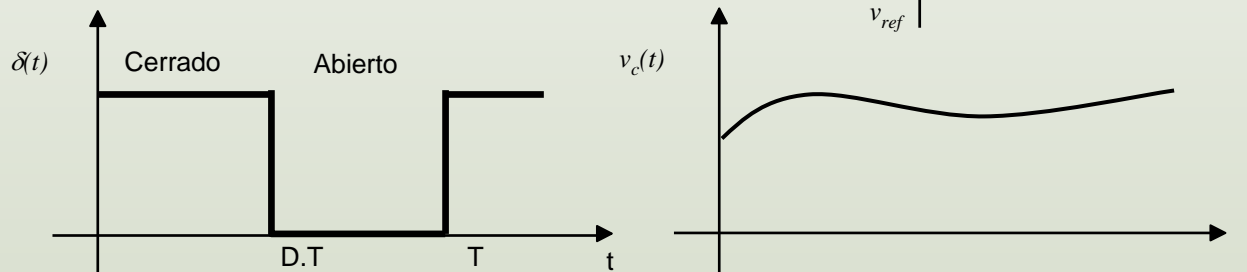
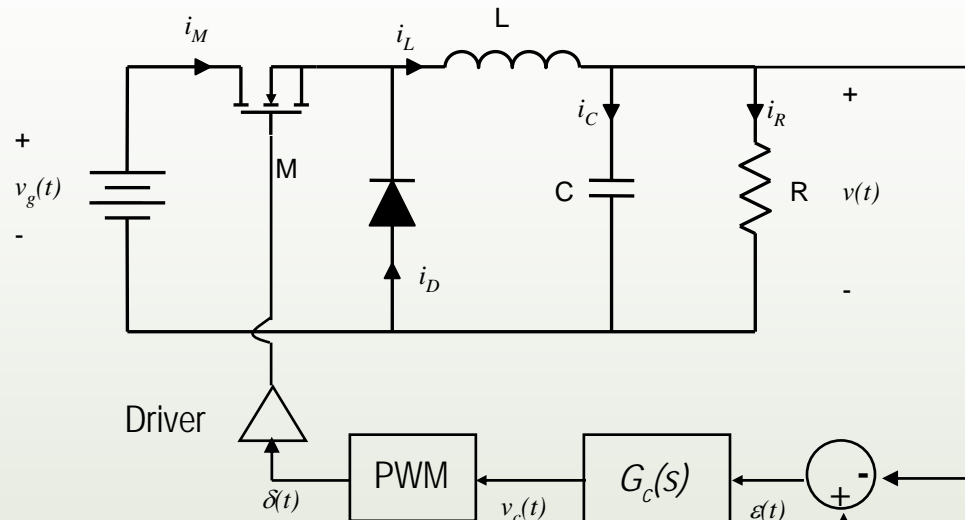
Referencias

Introducción (I)



- Los convertidores son conmutados porque el interruptor es el único elemento activo con capacidad de regulación cuyo rendimiento teórico es 100%.
- La regulación mediante dispositivos que trabajan en conmutación hace que los sistemas resultantes no sean LTI (lineales e invariantes en el tiempo).
- Sólo es posible utilizar el diagrama de bode en sistemas LTI.
- El tipo de regulación que vamos a considerar es PWM (modulación de ancho de pulso) con frecuencia de conmutación constante, $f_s=1/T$.
- El parámetro de control es el ciclo de trabajo, d .
- El ciclo de trabajo se obtiene a partir de una "señal de control", v_c .
- El ciclo de trabajo no se puede modificar dentro de un periodo de conmutación.
- El ciclo de trabajo resulta, por tanto, de muestrear v_c con un periodo T .

Introducción (II)



Objetivo: Diseñar $G_c(s)$ y realizarlo en un dispositivo tipo 3525, u otra implementación, por ejemplo digital.

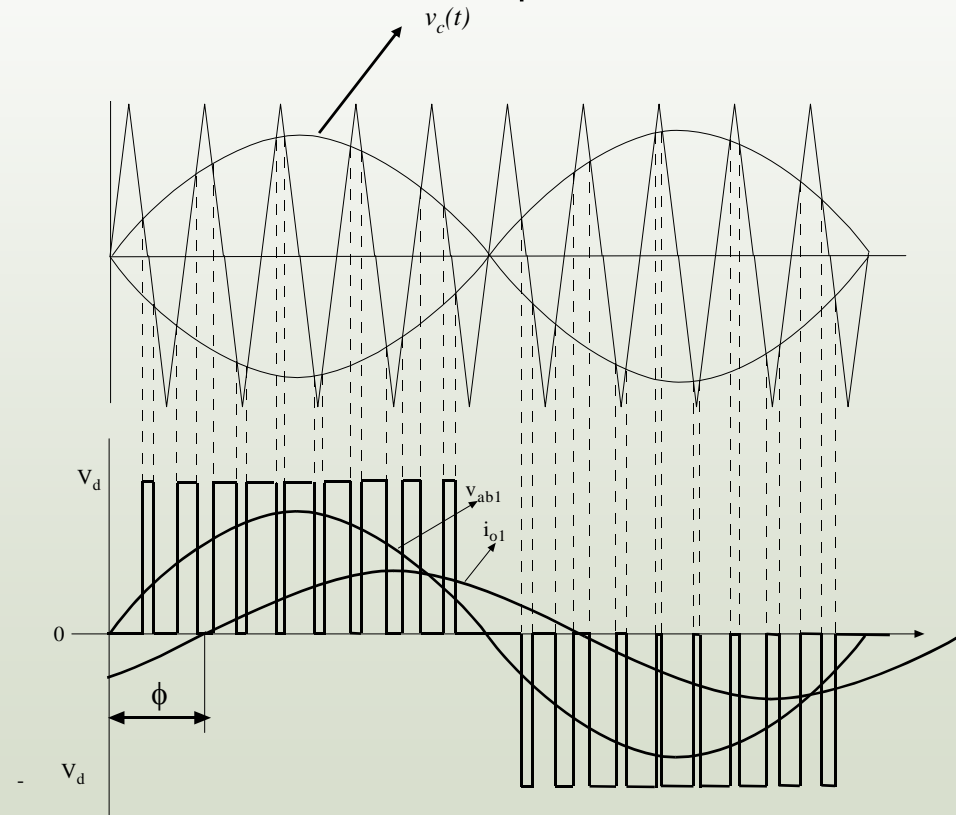
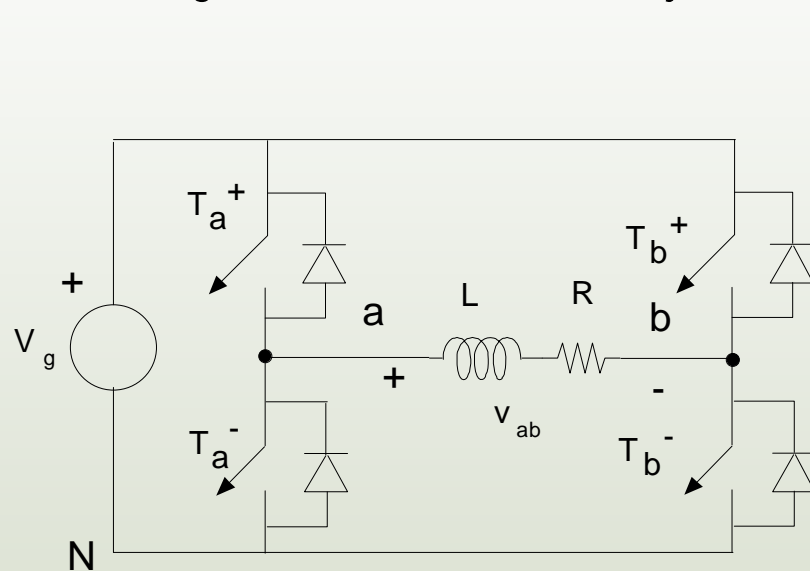
La señal $v_c(t)$ la podemos tratar como una señal moduladora, siendo la portadora una señal triangular de periodo T .

Generalización: $v_g(t)$ puede ser una tensión continua o alterna, V_{ref} puede ser una tensión continua o alterna. Con un esquema de control semejante podemos controlar $i_L(t)$ u otra variable, p.e. $p(t)$. También aplicaríamos este esquema sobre otra topología básica o derivada.

Introducción (III)

En este ejemplo V_g es constante. La tensión v_{aN} está controlada en bucle cerrado con V_{ref} sinusoidal y v_{bN} con la opuesta.

A partir de dos convertidores Buck conectados de forma diferencial se obtiene un inversor. Esta configuración tiene una ventaja adicional, se eliminan armónicos pares



Introducción (IV)



Ir a Simulink y hacer el muestreo con ZOH de periodo de muestreo constante sobre señales sinusoidales de diferentes frecuencias y obtener conclusiones:

La señal muestreada permite reconstruir la señal original si la frecuencia de muestreo es al menos el doble de la frecuencia de la sinusoidal (teorema del muestreo). Esto indica el ancho de banda en el que nos podemos mover para reaccionar ante perturbaciones

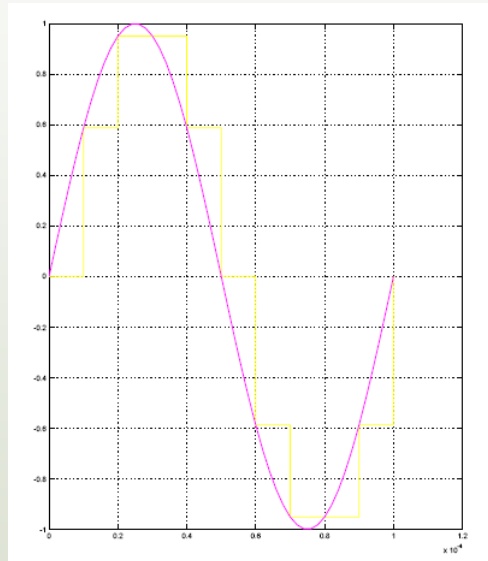
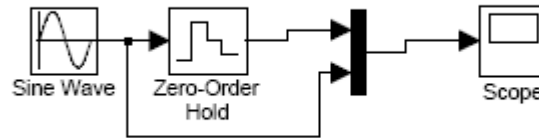
El muestreo y reconstrucción producen distorsión y desfase. El desfase es $T/2$.

Si la frecuencia de la perturbación es alta la distorsión tiene componentes de baja frecuencia

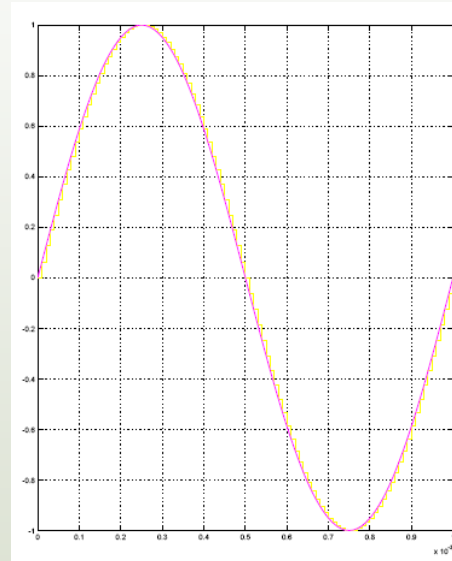
Si la frecuencia de la perturbación es suficientemente baja la distorsión debida al muestreo es de "alta frecuencia" y se filtra fácilmente.

Si la frecuencia de la perturbación es suficientemente baja el desfase, en ángulo, es pequeño. Esto indica en qué medida, un sistema muestreado, nos acerca a una situación de inestabilidad.

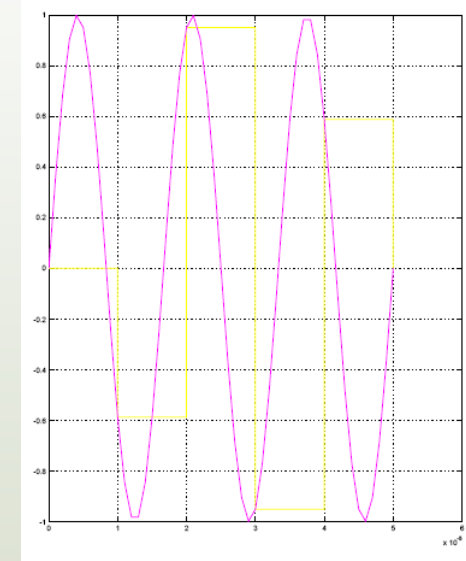
Introducción (V)



Muestreo 100kHz
Señal con perturbación de 10 kHz

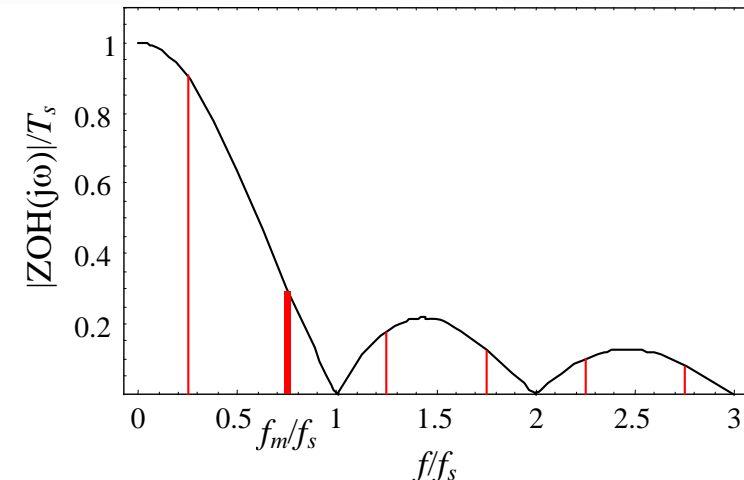
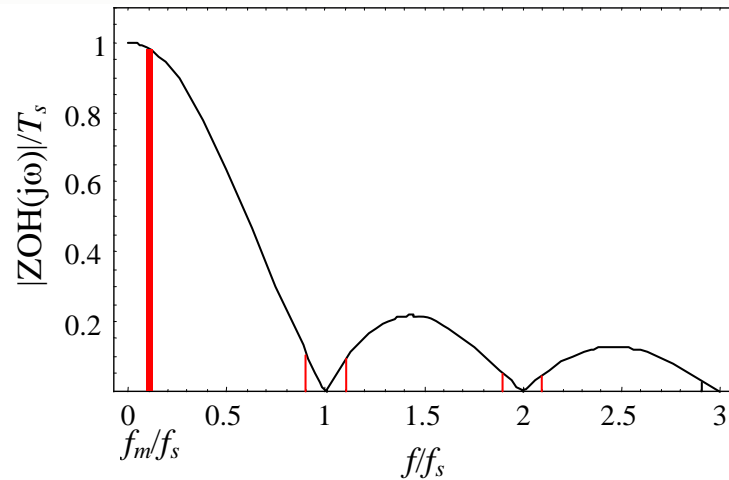


Muestreo 100kHz
Señal con perturbación de 1 kHz



Muestreo 100kHz
Señal con perturbación de 60 kHz

Introducción (VI)



Un convertidor conmutado con control PWM no es LTI.
La transformada de Laplace de un muestreador ideal es

$$\hat{v}_c^* = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{v}_c \left(s + \frac{j2n\pi}{T_s} \right)$$

Las réplicas se encuentran en $nf_s \pm f_m$, donde $f_s = 1/T$ es la frecuencia de conmutación, f_m la frecuencia de la perturbación, y n un entero.

La función de transferencia del zero-order hold en el dominio de la frecuencia es

$$ZOH(j\omega) = e^{-j\omega T_s/2} T_s \frac{\sin(\omega T_s)}{\omega T_s}$$

Si se desea realizar una regulación lineal de una fuente conmutada, el ancho de banda con el que se puede trabajar tiene que ser suficientemente inferior a f_s . Desde el punto de vista teórico $f_s/2$ y práctico $f_s/10$ para no tener mucha influencia de la distorsión y retraso de fase generada por el muestreo de v_c .

Las variables a regular serán las tensiones, intensidades o potencias pero sin las componentes de rizado de conmutación, es decir regularemos variables promedio tomando, en principio, como periodo para realizar el promedio, T .

Excepción: En el caso de la tensión de salida de un corrector de factor de potencia se realizará el promedio utilizando el periodo de la tensión de red rectificadas (10ms).

Especificación de rizado → la resuelve el filtro

Especificación de valor promedio → la resuelve el regulador

Inicialmente se realiza el estudio de circuitos en conducción continua utilizando una de las tres técnicas

- Promediado del circuito
- Variables de estado promedio
- Equivalente promedio de los elementos de conmutación

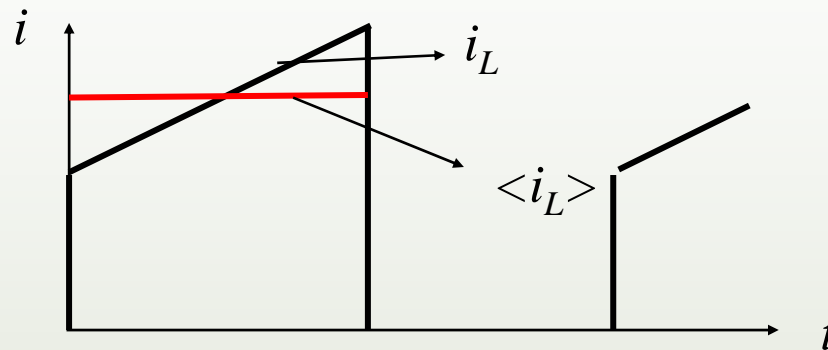
Esto permite obtener sistemas continuos, equivalentes al circuito conmutado.

Alrededor de un punto de funcionamiento se puede observar la aproximación lineal del comportamiento del sistema equivalente promedio. Con un equivalente LTI se puede estudiar el diagrama de bode

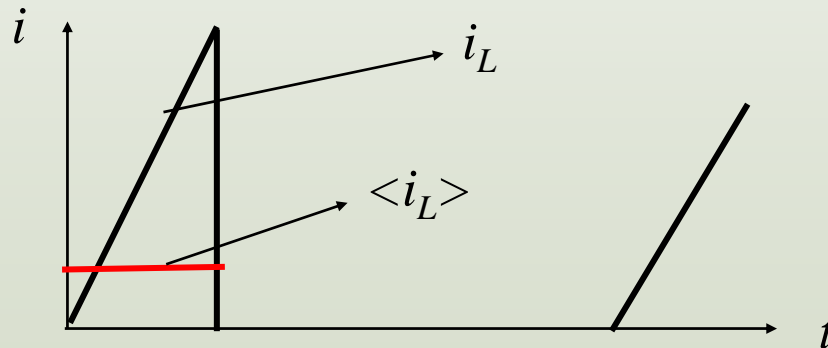
El resultado tiene validez en un ancho de banda limitado, no se modela la distorsión ni el desfase adicional.

Estudio en pequeña señal de modelos promedio (II)

Para calcular el valor medio en un periodo se utiliza la aproximación de bajo rizado, siempre que sea correcto



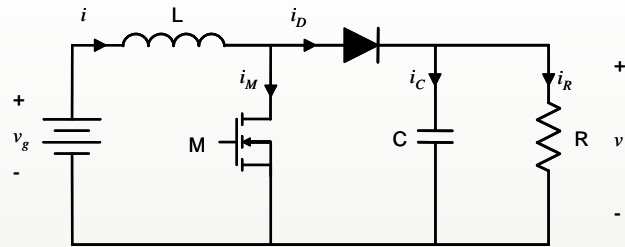
El área intensidad tiempo es idéntica si se calcula con i_L o con la aproximación de bajo rizado $\langle i_L \rangle$



En este caso, el área intensidad tiempo es no se puede calcular con la aproximación de bajo rizado $\langle i_L \rangle$. Hay que realizar la integral.

Ejemplo de promediado del circuito (I)

Método general, ejemplo Boost

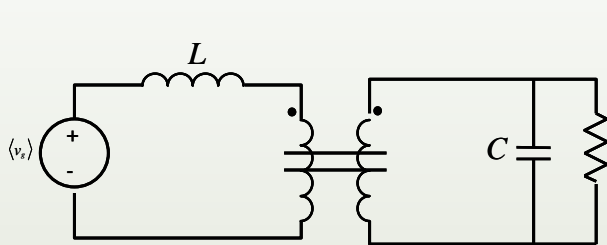


$$+ \langle v_g \rangle d + (\langle v_g \rangle - \langle v \rangle)(1-d) = L \frac{d\langle i \rangle}{dt}$$

$$- \frac{\langle v \rangle}{R} d + \left(\langle i \rangle - \frac{\langle v \rangle}{R} \right) (1-d) = C \frac{d\langle v \rangle}{dt}$$

$$- \langle v_g \rangle + \langle v \rangle (1-d) = L \frac{d\langle i \rangle}{dt}$$

$$- \frac{\langle v \rangle}{R} + \langle i \rangle (1-d) = C \frac{d\langle v \rangle}{dt}$$



$$(V_g + \hat{v}_g) - (V + \hat{v})(1-D - \hat{d}) = L \frac{dI}{dt} + L \frac{d\hat{i}}{dt}$$

$$- \frac{V}{R} - \frac{\hat{v}}{R} + (I + \hat{i})(1-D - \hat{d}) = C \frac{dV}{dt} + C \frac{d\hat{v}}{dt}$$

1: $\frac{1}{1-d}$

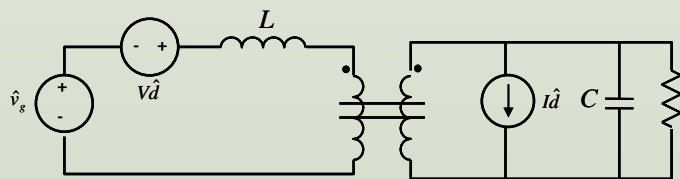
$$V = \frac{V_g}{1-D} \quad I = \frac{V}{(1-D)R}$$

Régimen permanente

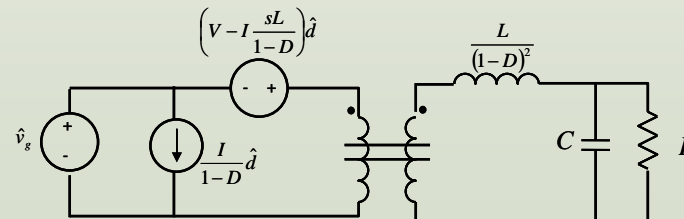
$$\hat{v}_g + V\hat{d} - \hat{v}(1-D) = L \frac{d\hat{i}}{dt}$$

$$- \frac{\hat{v}}{R} - I\hat{d} + \hat{i}(1-D) = C \frac{d\hat{v}}{dt}$$

Pequeña señal



1: $\frac{1}{1-D}$



1: $\frac{1}{1-D}$

Forma canónica

Ejemplo de promediado del circuito (II)

Utilizando el circuito en pequeña señal y cortocircuitando la perturbación de la tensión de alimentación

$$\left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\hat{v}_g(s)=0} = \left[V - \frac{V}{R} \frac{sL}{(1-D)^2} \right] \frac{1}{1-D} \frac{\frac{1}{sC} R}{\frac{1}{sC} + R} \frac{\frac{1}{sC} R}{\frac{sL}{(1-D)^2} + \frac{1}{sC} R}$$

$$\left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\hat{v}_g(s)=0} = \frac{V}{1-D} \left(1 - \frac{sL_{eq}}{R} \right) \frac{\frac{1}{sC} R}{sL_{eq} \left(\frac{1}{sC} + R \right) + \frac{1}{sC} R}$$

$$L_{eq} = \frac{L}{(1-D)^2}$$

$$\left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\hat{v}_g(s)=0} = \frac{V}{1-D} \frac{1 - s \frac{L_{eq}}{R}}{1 + s \frac{L_{eq}}{R} + s^2 L_{eq} C}$$

$$\left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\hat{v}_g(s)=0} = G_{d0} \frac{1 - \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2}$$

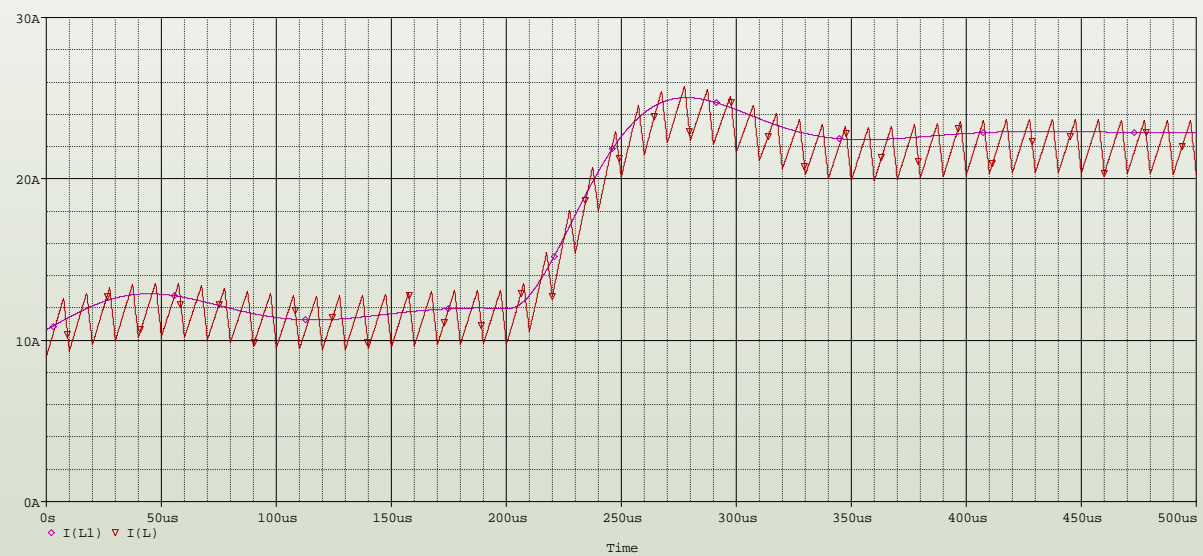
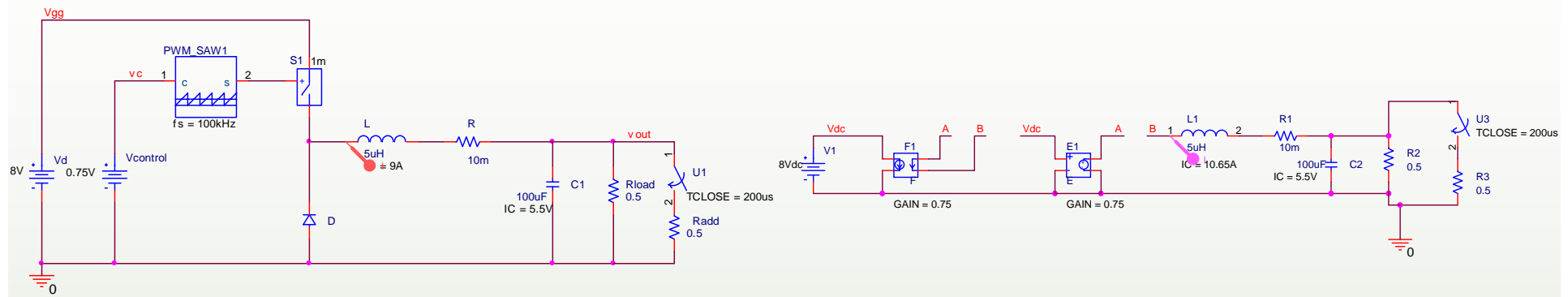
Identificando

$$G_{d0} = \frac{V}{1-D} \quad \omega_z = \frac{R}{L_{eq}} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq} C}} \quad Q = R \sqrt{\frac{C}{L_{eq}}}$$

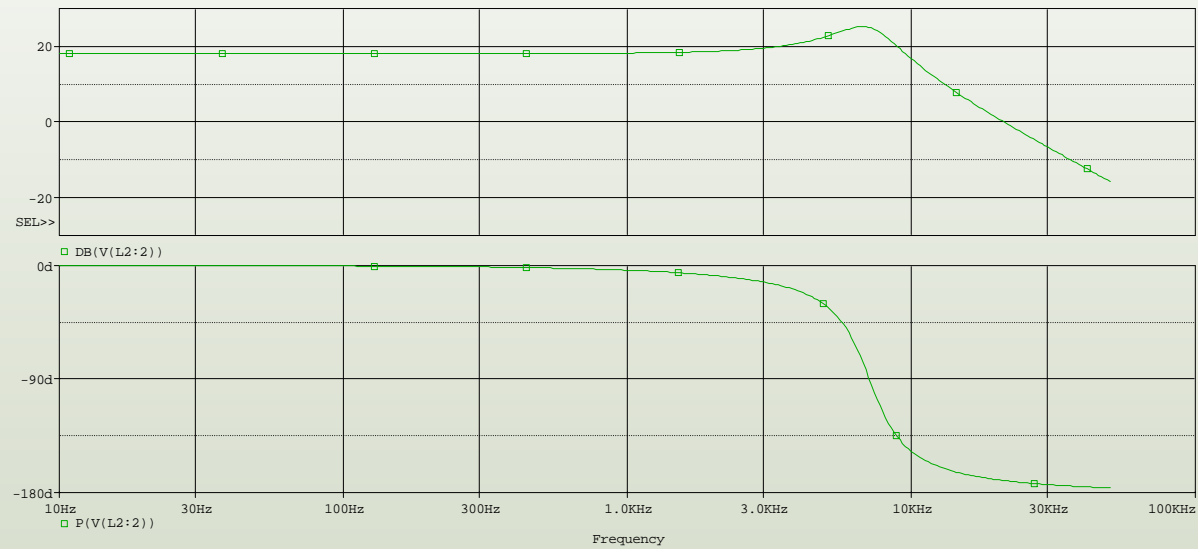
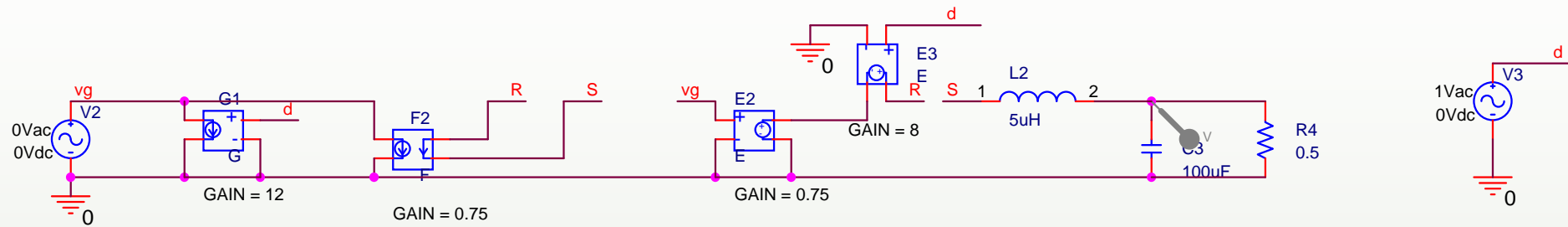
Ejemplo con PSpice (I)



Método general, ejemplo Buck

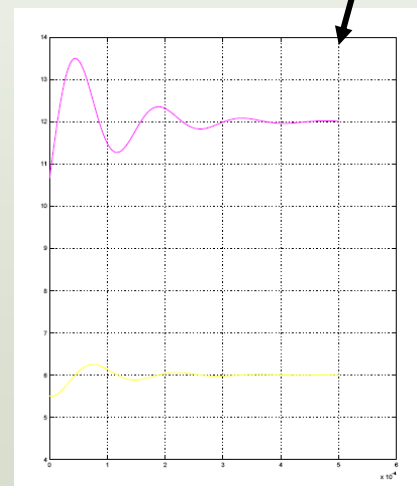
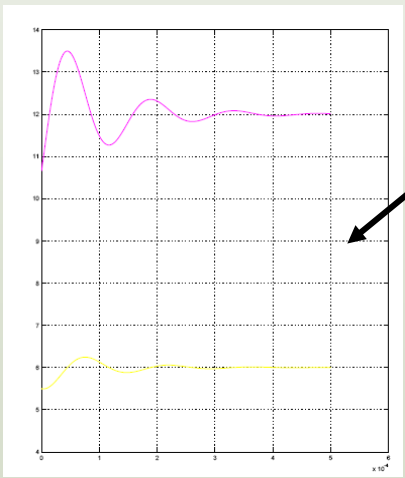
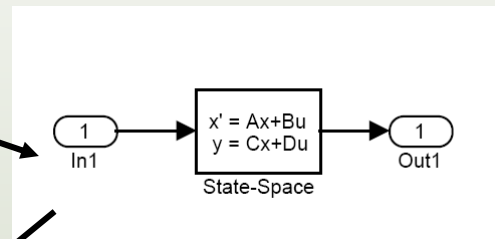
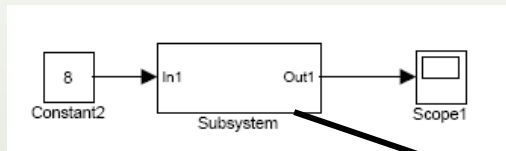
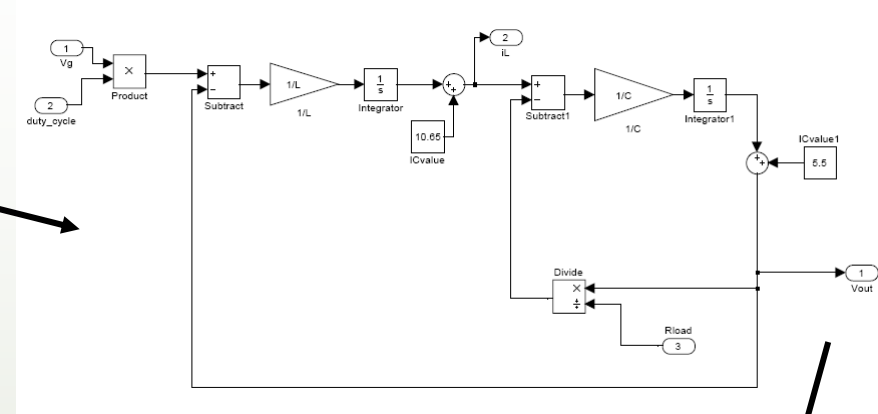
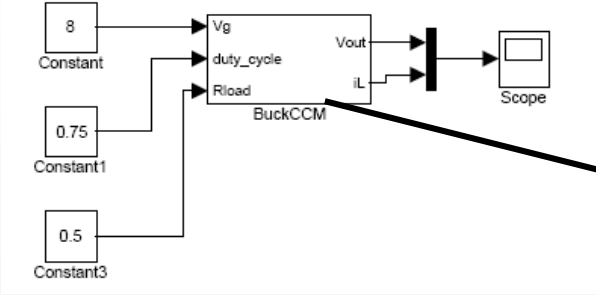


Ejemplo con Pspice (II)



Variables de estado (I)

Método general, ejemplo Buck



VARIABLES DE ESTADO (II)



$x(t)$, vector de intensidad por inductancias y tensión en condensadores

K , valores de capacidades e inductancias (propias y mutuas)

$u(t)$, vector de fuentes independientes

$y(t)$, vector de salida

$$K \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Eu(t)$$

Tiempo de ON \rightarrow

$$K \frac{dx(t)}{dt} = A_1x(t) + B_1u(t)$$

$$y(t) = C_1x(t) + E_1u(t)$$

Tiempo de OFF \rightarrow

$$K \frac{dx(t)}{dt} = A_2x(t) + B_2u(t)$$

$$y(t) = C_2x(t) + E_2u(t)$$

Promedio \rightarrow

$$K \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = (d(t)A_1 + (1-d(t))A_2)\langle x(t) \rangle + (d(t)B_1 + (1-d(t))B_2)\langle u(t) \rangle$$

$$\langle y(t) \rangle = (d(t)C_1 + (1-d(t))C_2)\langle x(t) \rangle + (d(t)E_1 + (1-d(t))E_2)\langle u(t) \rangle$$

Régimen permanente \rightarrow

$$0 = AX + BU$$

$$Y = CX + EU$$

$$X = -A^{-1}BU$$

$$Y = (-CA^{-1}B + E)U$$

$$A = DA_1 + (1-D)A_2$$

$$B = DB_1 + (1-D)B_2$$

$$C = DC_1 + (1-D)C_2$$

$$E = DE_1 + (1-D)E_2$$

Pequeña señal \rightarrow

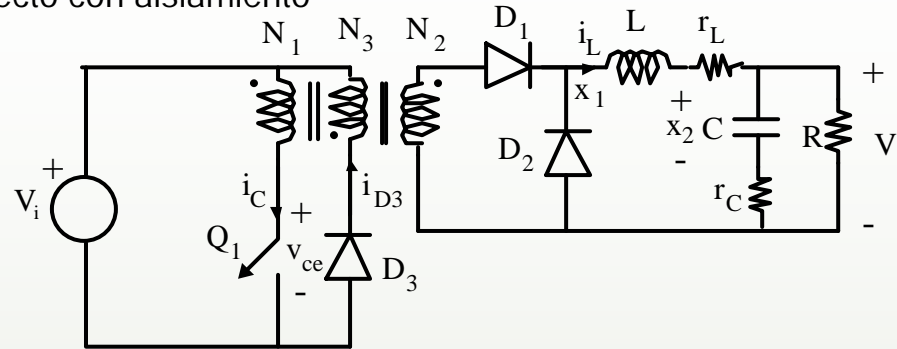
$$K \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) + \{(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)U\}\hat{d}(t)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + E\hat{u}(t) + \{(C_1 - C_2)X + (E_1 - E_2)U\}\hat{d}(t)$$

Variables de estado (III)

Método general, ejemplo Directo con aislamiento

ON



$$-V_i + L\dot{x}_1 + r_L x_1 + R(x_1 - C\dot{x}_2) = 0 \qquad -x_2 - Cr_C \dot{x}_2 + R(x_1 - C\dot{x}_2) = 0$$

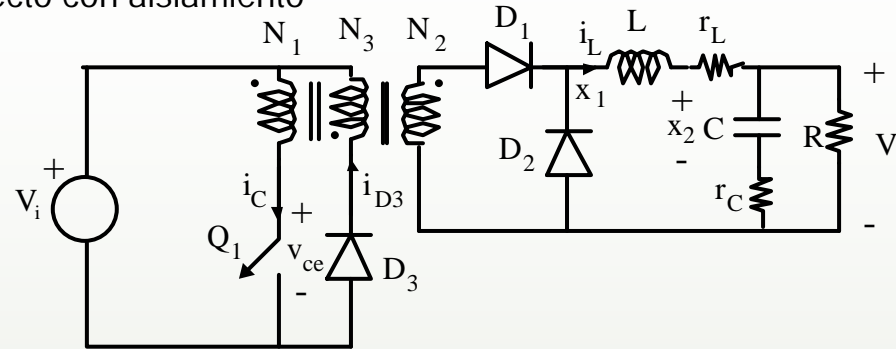
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Rr_C + Rr_L + r_C r_L}{L(R + r_L)} & -\frac{R}{L(R + r_C)} \\ \frac{R}{C(R + r_C)} & -\frac{1}{C(R + r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i$$

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 v_i$$

Variables de estado (IV)

Método general, ejemplo Directo con aislamiento

OFF



$$L\dot{x}_1 + r_L x_1 + R(x_1 - C\dot{x}_2) = 0$$

$$-x_2 - Cr_C \dot{x}_2 + R(x_1 - C\dot{x}_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Rr_C + Rr_L + r_C r_L}{L(R + r_L)} & -\frac{R}{L(R + r_C)} \\ \frac{R}{C(R + r_C)} & -\frac{1}{C(R + r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = A_2 x$$

Variables de estado (V)

$$v_o = R(x_1 - C\dot{x}_2)$$

$$v_o = \frac{Rr_c}{R+r_c}x_1 + \frac{R}{R+r_c}x_2$$

$$v_o = \begin{bmatrix} \frac{Rr_c}{R+r_c} & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$v_o = Cx$$

Obtención del promedio

$$\langle \dot{x} \rangle = [A_1d + A_2(1-d)]\langle x \rangle + [B_1d + B_2(1-d)]\langle v_i \rangle$$

$$\langle v_o \rangle = [C_1d + C_2(1-d)]\langle x \rangle$$

Variables de estado (VI)



Si consideramos $R \gg (r_C + r_L)$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{r_C + r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} d$$

$$C = [r_C \quad 1]$$

Una vez definido el modelo promediado continuo se realiza análisis en régimen permanente o en pequeña señal

Régimen permanente

$$\langle \dot{x} \rangle = 0 \quad AX + B_1 D V_i = 0 \quad V_o = CX \quad \frac{V_o}{V_i} = -CA^{-1}B_1D$$

$$A^{-1} = \frac{LC}{1 + \frac{r_C + r_L}{R}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{r_C + r_L}{L} \end{bmatrix}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = D \frac{R + r_C}{R + (r_C + r_L)} \cong D$$

Pequeña señal

$$\text{Causas: } d \rightarrow D + \hat{d} \quad v_i \rightarrow V_i + \hat{v}_i$$

$$\text{Efectos: } x \rightarrow X + \hat{x} \quad v_o \rightarrow V_o + \hat{v}_o$$

$$\text{Para el caso de } \hat{d} \quad \langle \dot{\hat{x}} \rangle + \langle \hat{x} \rangle = AX + B_1DV_i + A\langle \hat{x} \rangle + B_1V_i\hat{d}$$

$$\langle \hat{\dot{x}} \rangle = A\langle \hat{x} \rangle + B_1V_i\hat{d} \quad \hat{v}_o = C\langle \hat{x} \rangle$$

$$\text{Función de transferencia} \quad s\hat{x}(s) = A\hat{x}(s) + B_1V_i\hat{d}(s)$$

$$\hat{v}_o(s) = C\hat{x}(s)$$

Pequeña señal

Función de transferencia

$$\frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{d}(s)} = C[sI - A]^{-1} B_1 V_i = G(s)$$

$$G(s) = V_i \frac{1 + sr_c C}{LC \left[s^2 + s \left(\frac{1}{CR} + \frac{r_c + r_L}{L} \right) + \frac{1}{LC} \right]}$$

El denominador es de la forma

$$s^2 + 2\zeta\omega_o s + \omega_o^2$$

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

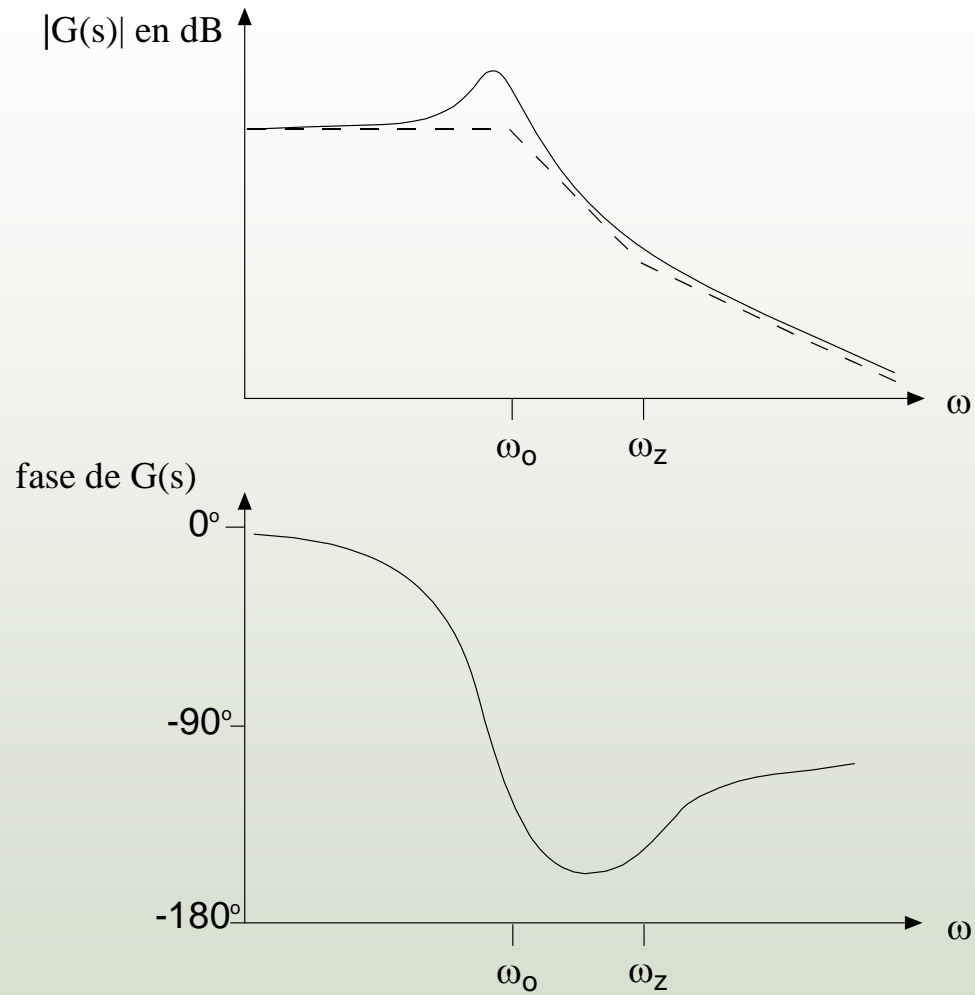
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{\frac{1}{CR} + \frac{r_c + r_L}{L}}{2\omega_o}$$

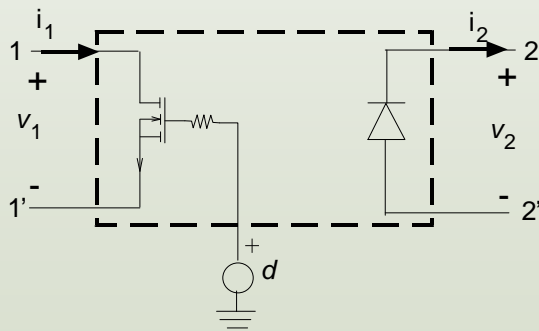
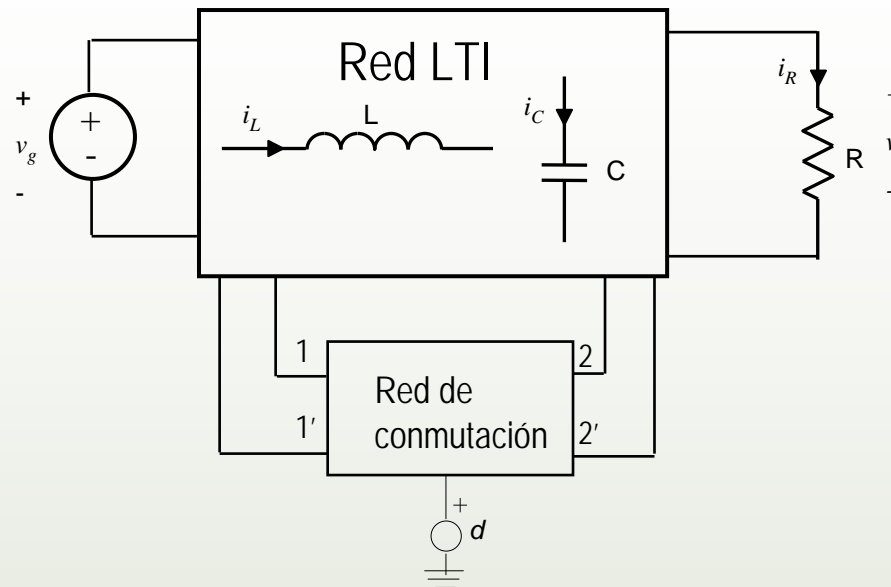
$$\omega_z = \frac{1}{r_c C}$$

Variables de estado (X)

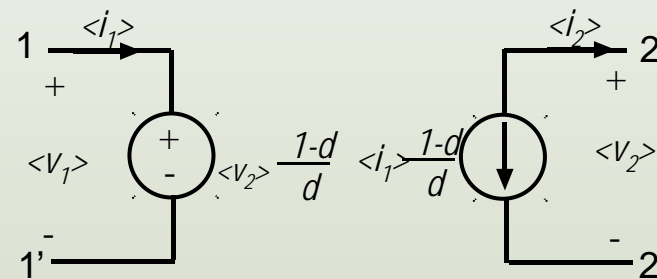
Pequeña señal



Equivalente promedio de los elementos de conmutación (I)

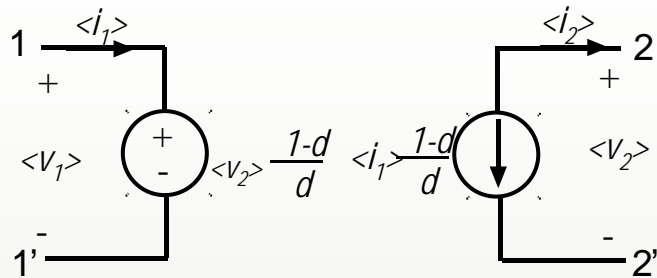


Red de conmutación



Equivalente promedio

Equivalente promedio de los elementos de conmutación (II)



Equivalente promedio

Promedio

$$d\langle v_1 \rangle = (1-d)\langle v_2 \rangle$$

$$(1-d)\langle i_1 \rangle = d\langle i_2 \rangle$$

Perturbación

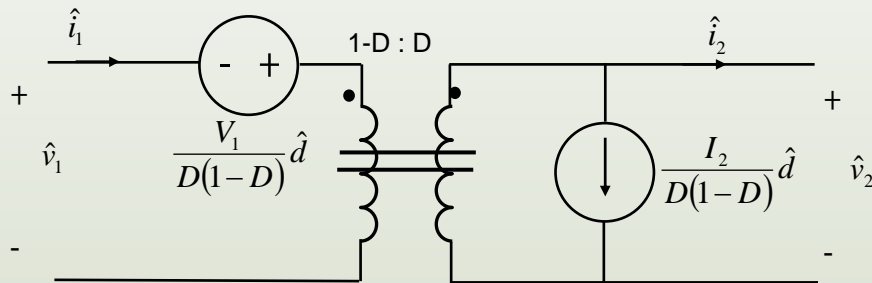
$$(D + \hat{d})(V_1 + \hat{v}_1) = (1 - D - \hat{d})(V_2 + \hat{v}_2)$$

$$(1 - D - \hat{d})(I_1 + \hat{i}_1) = (D + \hat{d})(I_2 + \hat{i}_2)$$

Lineal

$$DV_1 + D\hat{v}_1 + \hat{d}V_1 = (1 - D)V_2 + (1 - D)\hat{v}_2 - \hat{d}V_2$$

$$(1 - D)I_1 + (1 - D)\hat{i}_1 - \hat{d}I_1 = DI_2 + D\hat{i}_2 + \hat{d}I_2$$



Equivalente pequeña señal

Régimen Permanente

$$DV_1 = (1 - D)V_2$$

$$(1 - D)I_1 = DI_2$$

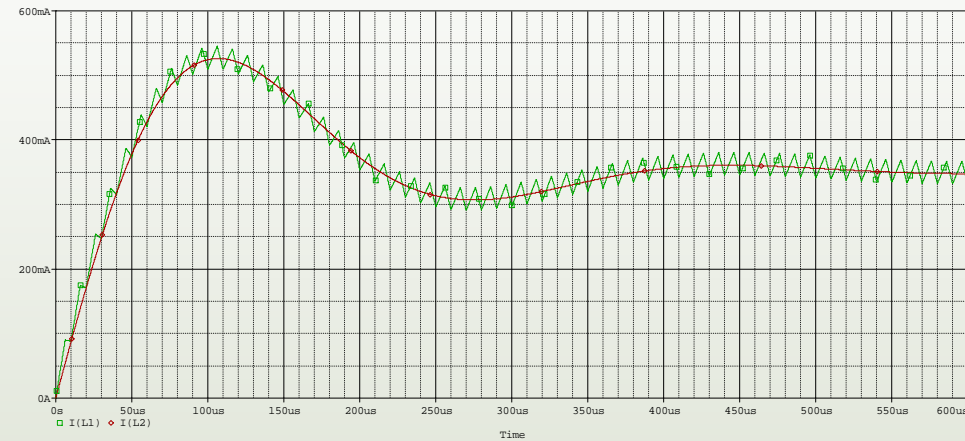
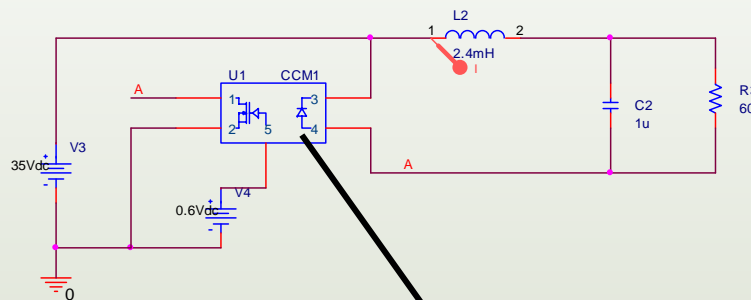
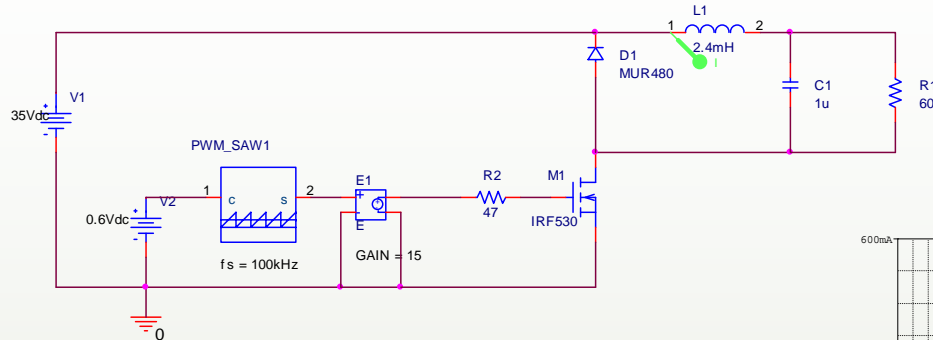
Pequeña señal

$$D\hat{v}_1 + \hat{d}V_1 = (1 - D)\hat{v}_2 - \hat{d}V_2$$

$$(1 - D)\hat{i}_1 - \hat{d}I_1 = D\hat{i}_2 + \hat{d}I_2$$

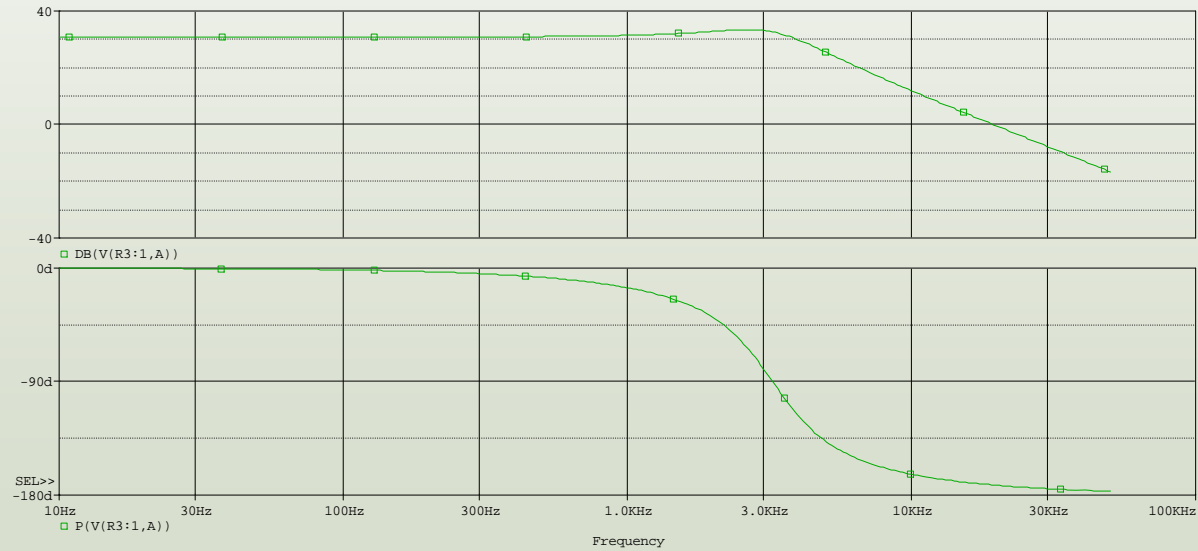
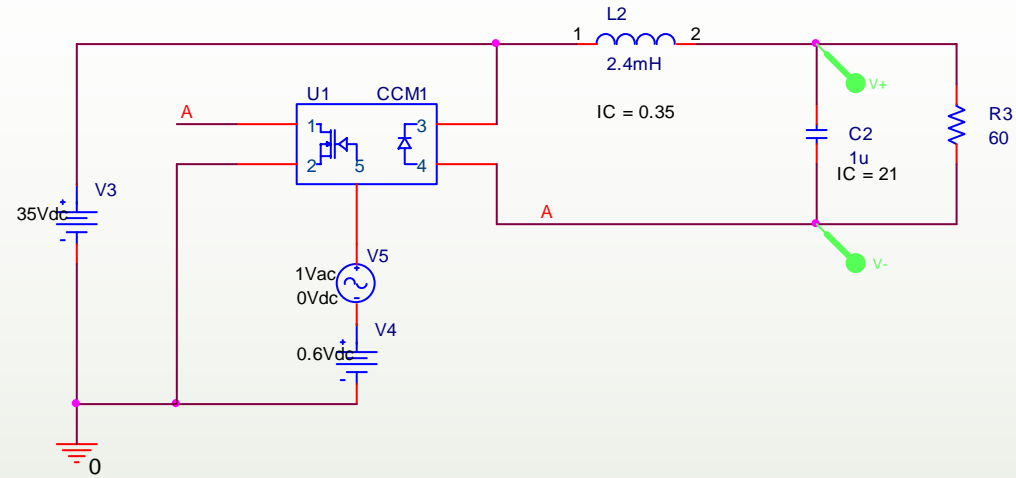
Equivalente promedio de los elementos de conmutación (III)

Método general, ejemplo Buck



```
.subckt CCM1 1 2 3 4 5
Et 1 2 value={ (1-v(5))*v(3,4)/v(5) }
Gd 4 3 value={ (1-v(5))*i(Et)/v(5) }
.ends
```

Equivalente promedio de los elementos de conmutación (IV)





Para modelar un convertidor obtenemos el valor promedio de las variables de estado.

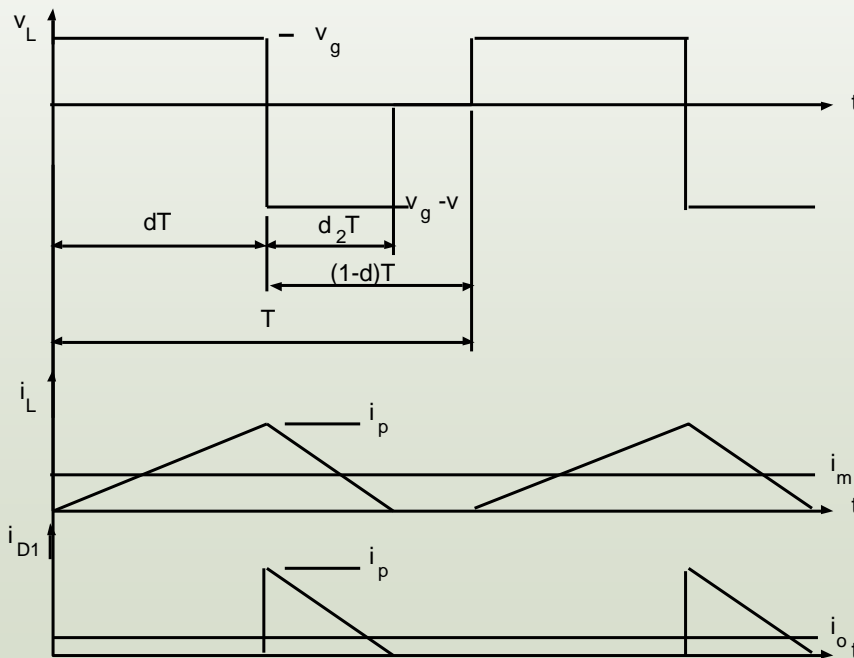
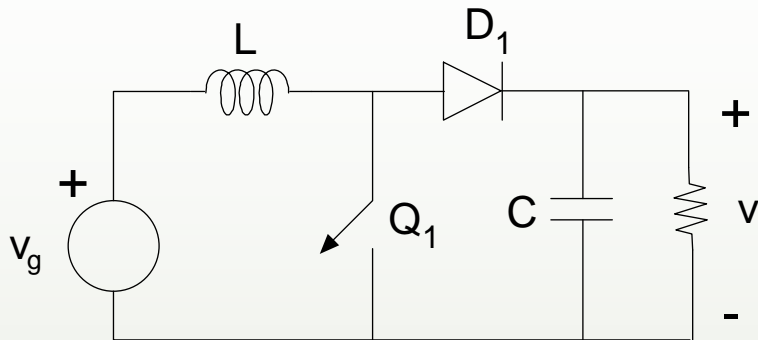
a) En conducción continua las variables promedio son una función continua.

b) En conducción continua no hay restricciones impuestas asumiendo régimen permanente.

En conducción discontinua pueden no cumplirse las condiciones a) y b)

Modelado de convertidores en conducción discontinua (II)

Ejemplo conducción discontinua



$$\dot{x} = A_1 x + B_1 v_g \quad [0, dT]$$

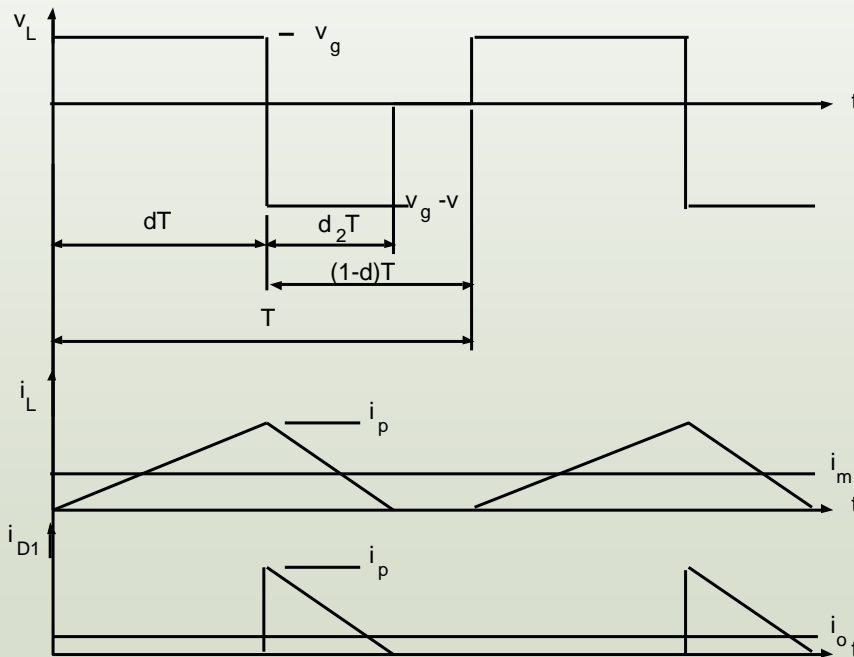
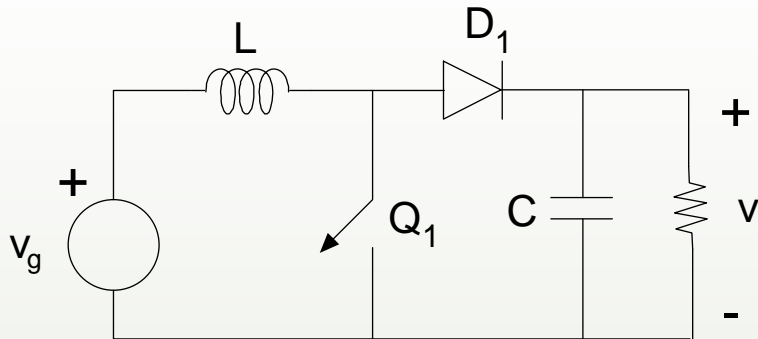
$$\dot{x} = A_2 x + B_2 v_g \quad [dT, (d+d_2)T]$$

$$\dot{x} = A_3 x + B_3 v_g \quad [(d+d_2)T, T]$$

Modelado de convertidores en conducción discontinua (III)



Ejemplo conducción discontinua



$[0, dT]$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g}{L}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R}$$

$[dT, (d+d_2)T]$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g - v}{L}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i_L - \frac{v}{R}}{C}$$

$[(d+d_2)T, T]$

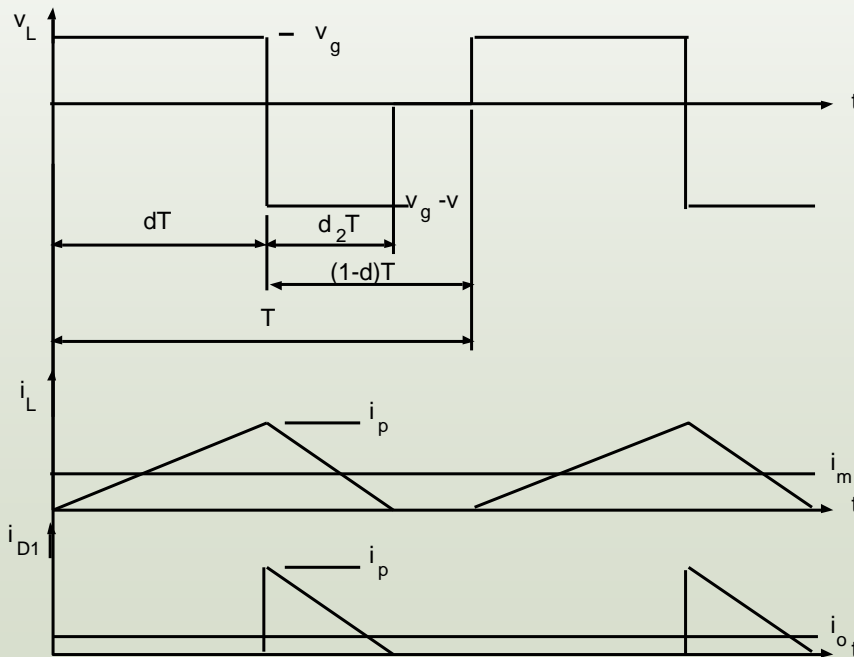
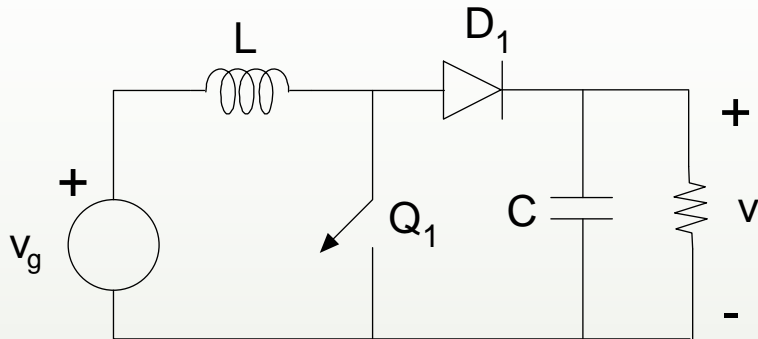
$$\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{R}$$

Modelado de convertidores en conducción discontinua (IV)



Ejemplo conducción discontinua



Promedio

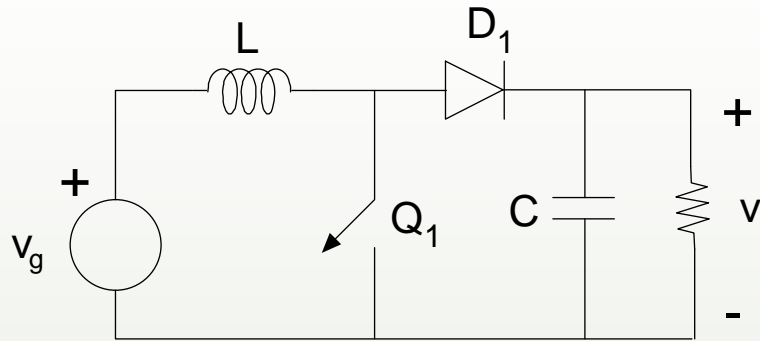
$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = \frac{(d + d_2)\langle v_g \rangle - d_2\langle v \rangle}{L}$$

$$\frac{d\langle v_c \rangle}{dt} = \frac{\frac{1}{T} \int_{d_2 T}^{(d+d_2)T} i_L dt - \frac{\langle v \rangle}{R}}{C}$$

¿¿d₂??

Paradoja del promedio (I)

En conducción discontinua la intensidad inicial y final en cada periodo es cero

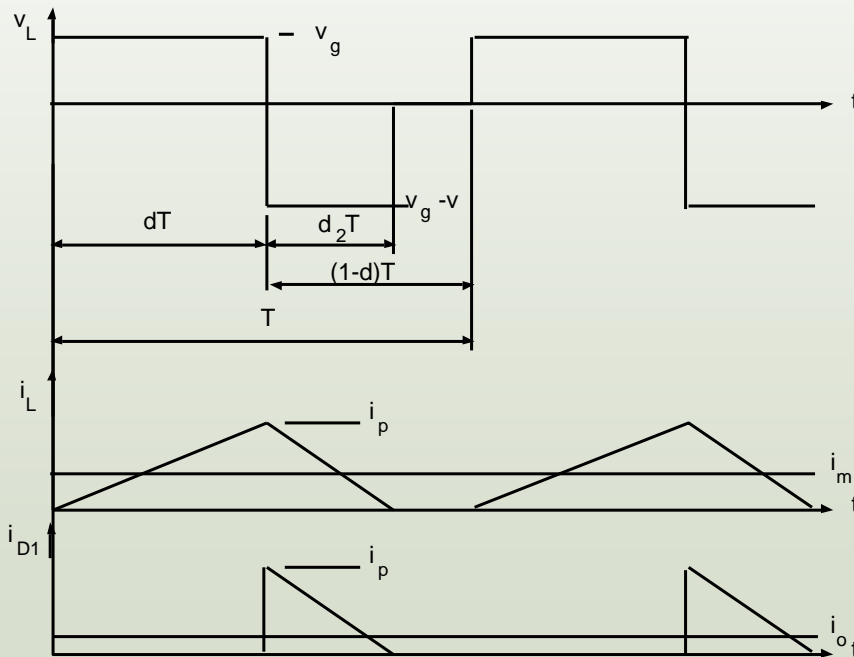


$$[0, dT]$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g}{L}$$

$$[dT, (d+d_2)T]$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g - v}{L}$$



$$[(d+d_2)T, T]$$

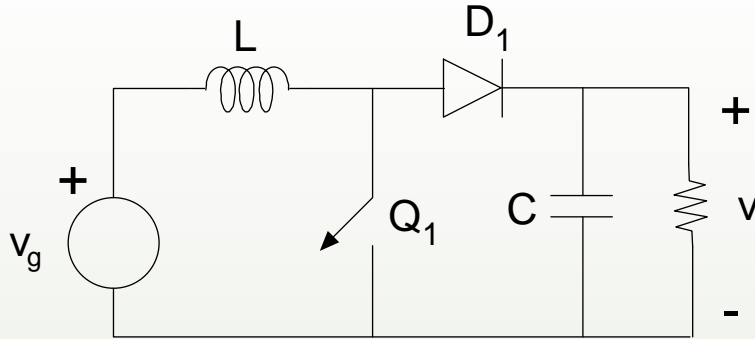
$$\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\frac{\langle v_g \rangle}{L} d + \frac{\langle v_g \rangle - \langle v \rangle}{L} d_2 = 0$$

$$d_2 = \frac{d \langle v_g \rangle}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle}$$

Paradoja del promedio (II)

En conducción discontinua la intensidad inicial y final en cada periodo es cero



$$[0, dT]$$

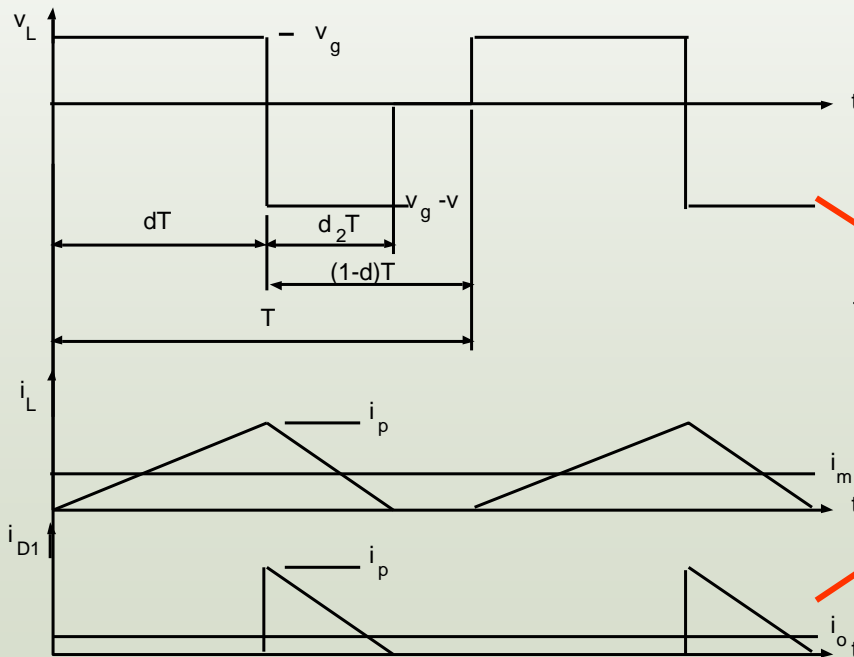
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g}{L}$$

$$[dT, (d+d_2)T]$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_g - v}{L}$$

$$[(d+d_2)T, T]$$

$$\frac{di_L}{dt} = 0$$



~~$$\frac{\langle v_g \rangle}{L} d + \frac{\langle v_g \rangle - \langle v \rangle}{L} d_2 = 0$$~~

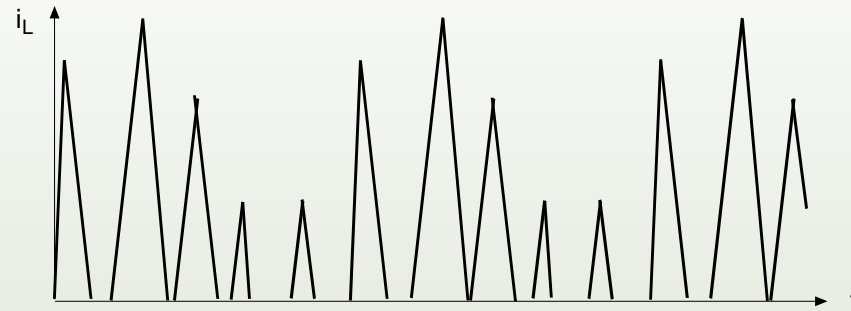
~~$$d_2 = \frac{\langle v_g \rangle}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle}$$~~

$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = 0??$$

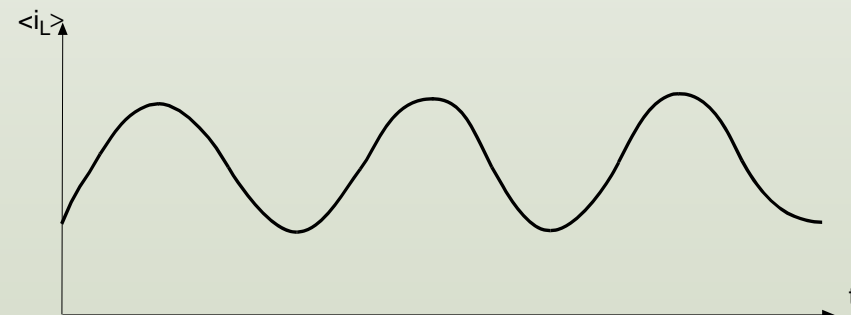
Paradoja del promedio (III)

Utilizar
$$d_2 = \frac{d\langle v_g \rangle}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle} \rightarrow \frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = 0$$

Supone decir que la función $\langle i_L \rangle$ en la siguiente gráfica es constante



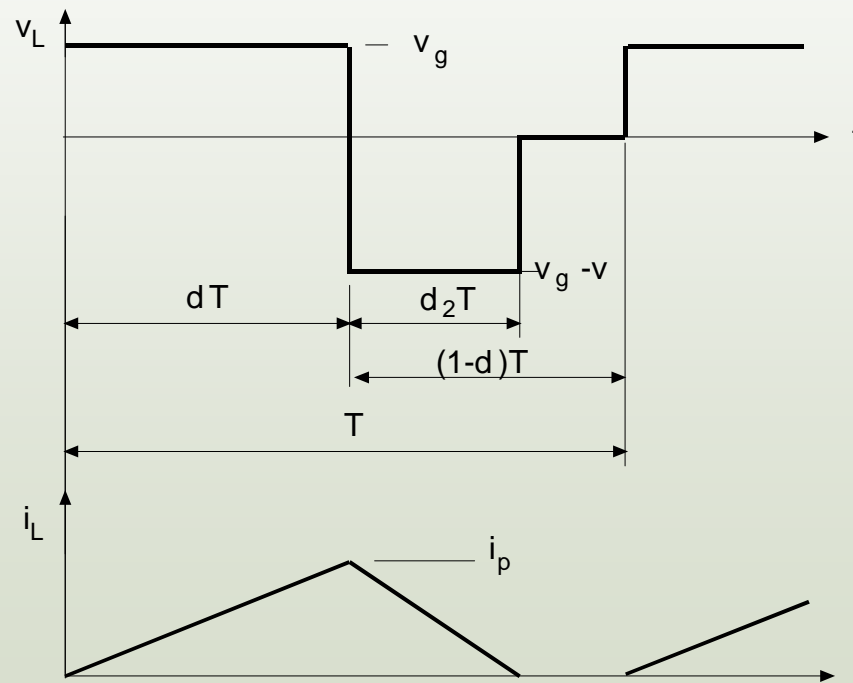
Y, sin embargo es



Paradoja del promedio (IV)

Si la intensidad en la inductancia tiene una componente de baja frecuencia también existirá una componente de baja frecuencia de tensión.

Sin embargo, un muestreador de tensión promedio en cada periodo kT obtiene $\langle v_L \rangle(kT) = 0$



¿Qué ocurre?

- a) Se ha asumido $d\langle i_L \rangle / dt = 0$
- b) No se ha calculado la función continua de $\langle i_L \rangle$, sino que hemos muestreado $\langle i_L \rangle$ en cada periodo kT .
- c) Se ha asumido el valor de $\langle i_L \rangle$ muestreado constante para todo el periodo (hold de orden cero).
- d) Se ha muestreado una función con una frecuencia de muestreo igual a la de la función.
- e) Se da por hecho que dentro de un periodo la tensión de salida no cambia.

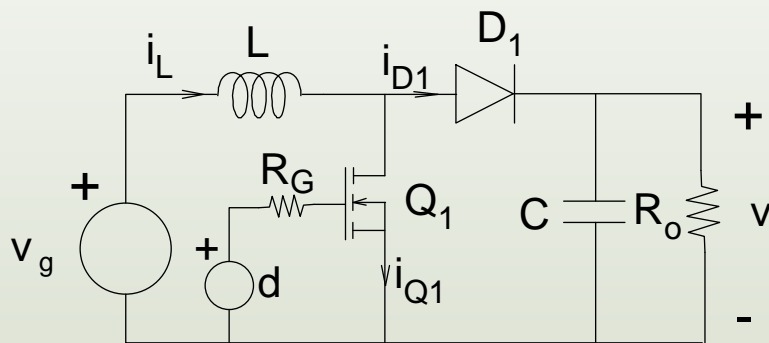
Orden reducido (I)

Se utiliza como ejemplo el convertidor elevador

Si para realizar el modelo utilizamos la restricción

$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = 0$$

El orden del modelo promediado se reduce en 1



$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = \frac{(d + d_2)\langle v_g \rangle - d_2\langle v \rangle}{L}$$

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = \frac{d_2\langle i_L \rangle}{C} - \frac{\langle v \rangle}{RC}$$

¡Aproximación de bajo rizado!

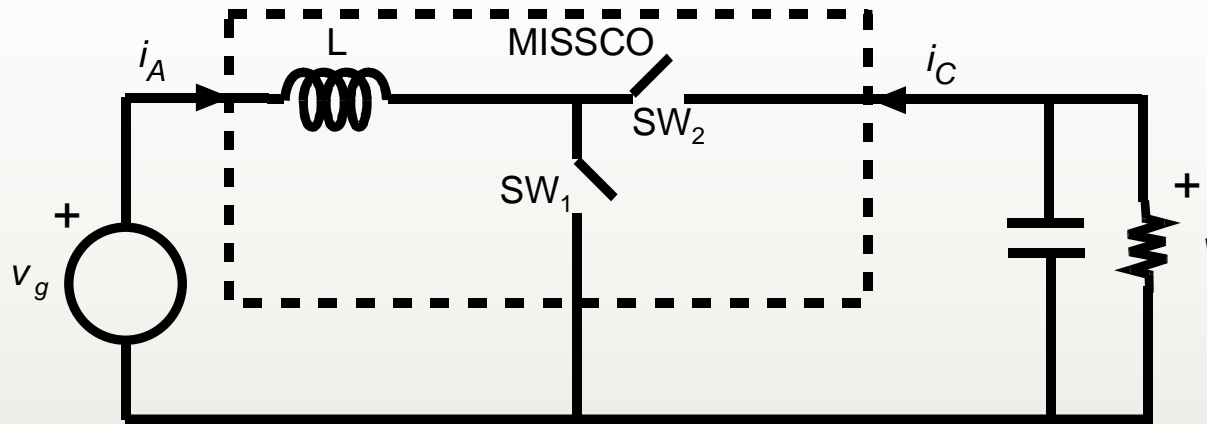
Cálculo sin aproximación de bajo rizado

$$d_2 = d \frac{\langle v_g \rangle}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle}$$

$$C \frac{d\langle v \rangle}{dt} = \frac{1}{T} \left[\frac{v}{R} DT + \int_{dT}^{(d+d_2)T} \left(\frac{v_g dT}{L} + \frac{v_g - v}{L} (t - dT) - \frac{v}{R} \right) dt - \frac{v}{R} (1 - d - d_2) T \right]$$

$$\frac{d\langle v \rangle}{dt} = \frac{v_g^2 d^2 T}{2LC(v - v_g)} - \frac{v}{RC}$$

Circuito equivalente (Boost)



$$0 < t < dT: \text{SW}_1 \text{ en ON, SW}_2 \text{ en OFF} \quad i_A = v_g \frac{t}{L} \quad i_C = 0$$

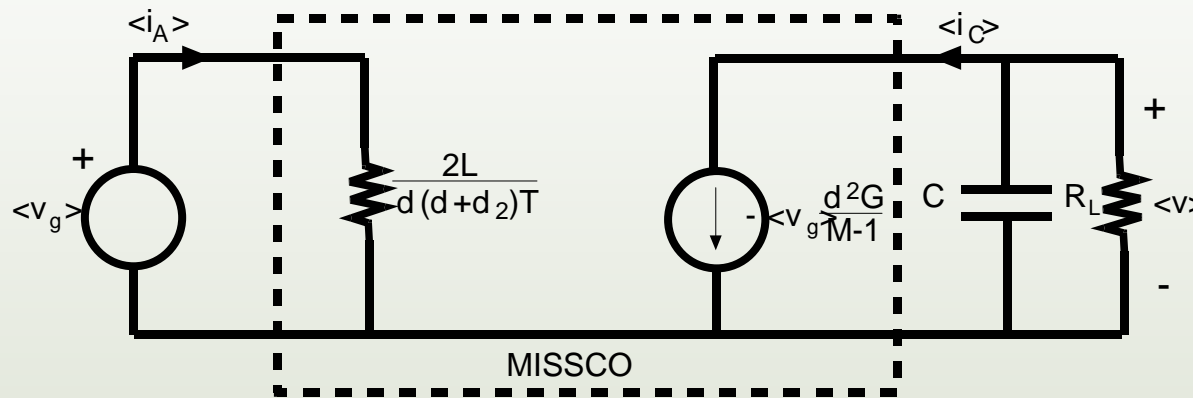
$$dT < t < (D+D_2)T: \text{SW}_1 \text{ en OFF, SW}_2 \text{ en ON} \quad i_C = -i_A \quad i_C = -v_g \frac{dT}{L} + (v - v_g) \frac{(t - dT)}{L}$$

$$(D+D_2)T < t < T: \text{SW}_1 \text{ en OFF, SW}_2 \text{ en OFF} \quad i_A = 0 \quad i_C = 0$$

Orden reducido (IV)

Circuito equivalente (Boost)

Respuesta promedio $\langle i_A \rangle = \langle v_g \rangle \frac{T}{2L} d(d + d_2)$ $\langle i_C \rangle = -\langle v_g \rangle \frac{T}{2L} dd_2$

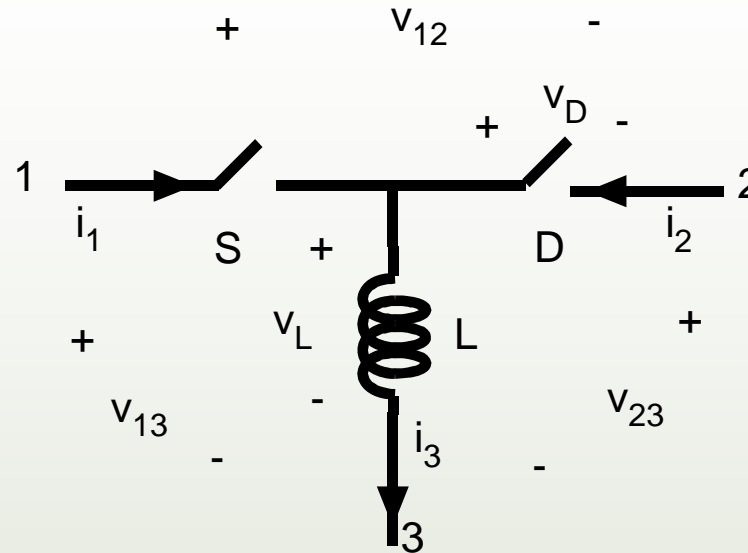


Definiendo los parámetros $G = \frac{T}{2L}$ $M = \frac{\langle v \rangle}{\langle v_g \rangle} = \frac{d + d_2}{d_2}$ $\langle i_C \rangle = -\langle v_g \rangle d^2 \frac{G}{M - 1}$

¿Desaparece L del modelo?

Orden reducido (V)

Circuito equivalente generalizado



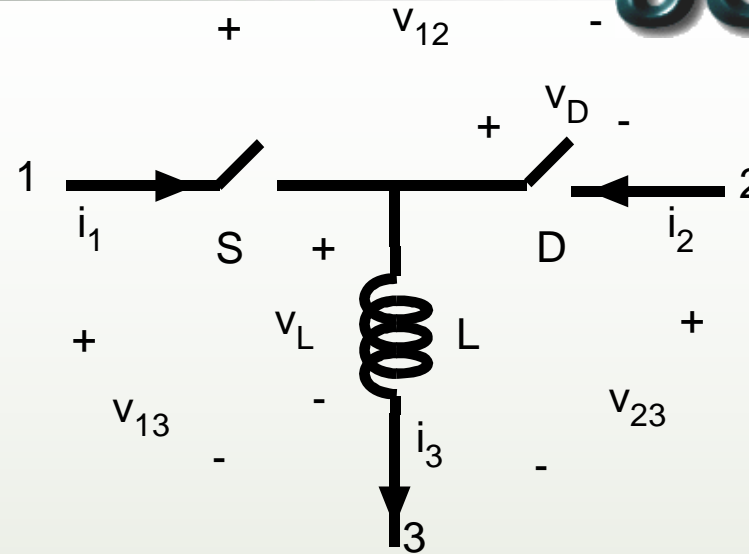
$$d_2 = -\frac{\langle v_{13} \rangle}{\langle v_{23} \rangle} d$$

$$\langle i_1 \rangle = \frac{d^2 \langle v_{13} \rangle T}{2L}$$

$$\langle i_2 \rangle = -\frac{d^2 \langle v_{13} \rangle^2 T}{2L \langle v_{23} \rangle}$$

Orden completo (I)

~~$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = 0$$~~



$$L \frac{di_L}{dt} = \langle v_{12} \rangle + \langle v_{23} \rangle$$

$$L \frac{di_L}{dt} = \langle v_{23} \rangle$$

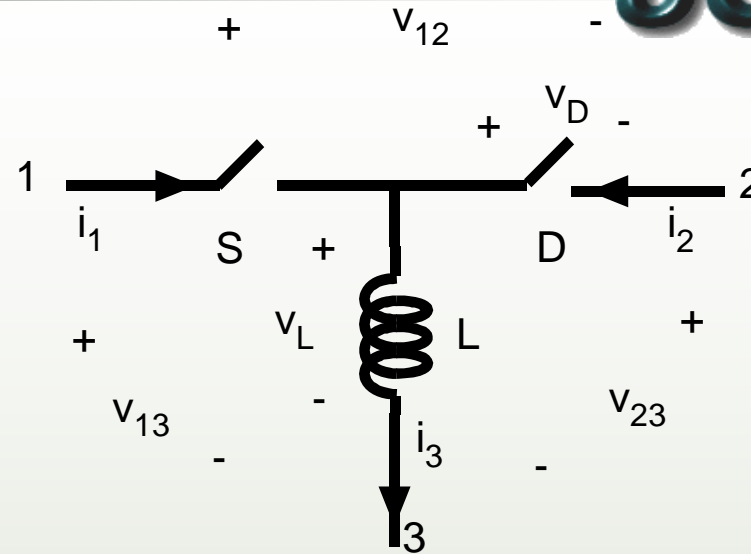
$$i_L = 0$$

$0 < t < dT$: S en ON, D en OFF

$dT < t < (d+d_2)T$: S en OFF, D en ON

$(d+d_2)T < t < T$: S en OFF, D en OFF

~~$$\frac{d\langle i_L \rangle}{dt} = 0$$~~



$$\langle i_L \rangle = \frac{d + d_2}{2} \frac{\langle v_{12} \rangle + \langle v_{23} \rangle}{L} dT$$

¡Este modelo considera $\langle v_L \rangle = 0$ y que la tensión media de salida dentro de cada periodo no varía!

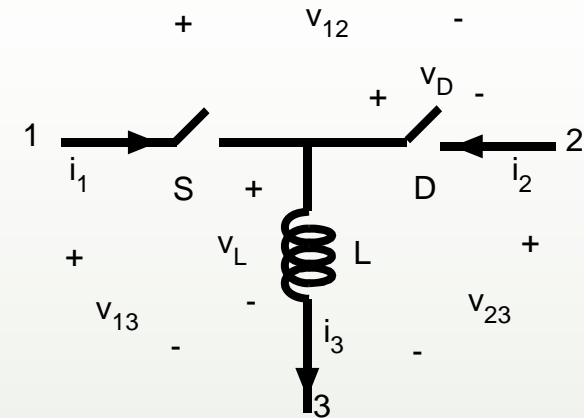
Orden completo (III)

$$\langle v_L \rangle = \langle v_D \rangle + \langle v_{23} \rangle$$

$$\langle v_{23} \rangle = -\langle v_D \rangle$$

$$\langle i_L \rangle = \frac{d + d_2}{2} \frac{\langle v_{12} \rangle - \langle v_D \rangle}{L} dT$$

$$d_2 = -\frac{\langle v_{13} \rangle}{\langle v_{23} \rangle} d = \frac{\langle v_{12} \rangle - \langle v_D \rangle}{\langle v_D \rangle} d$$



¡misma expresión que en orden reducido!

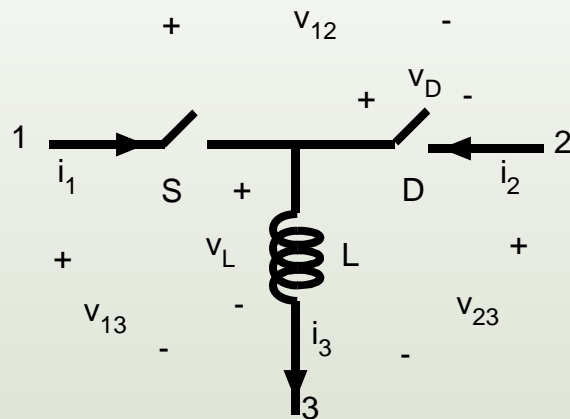
Se introduce un nuevo parámetro, ciclo de trabajo equivalente, m , que relaciona la tensión en los semiconductores.

$$m = \frac{\langle v_D \rangle}{\langle v_{12} \rangle}$$

Orden completo (IV)

D_2 se calcula con $\langle v_L \rangle = 0$ pero $\langle i_L \rangle$ lo calculamos introduciendo m .
 Supone una mejora con respecto al orden reducido.

$$\langle i_L \rangle = \frac{d^2 T}{2L} \langle v_{12} \rangle \left(\frac{1}{m} - 1 \right)$$



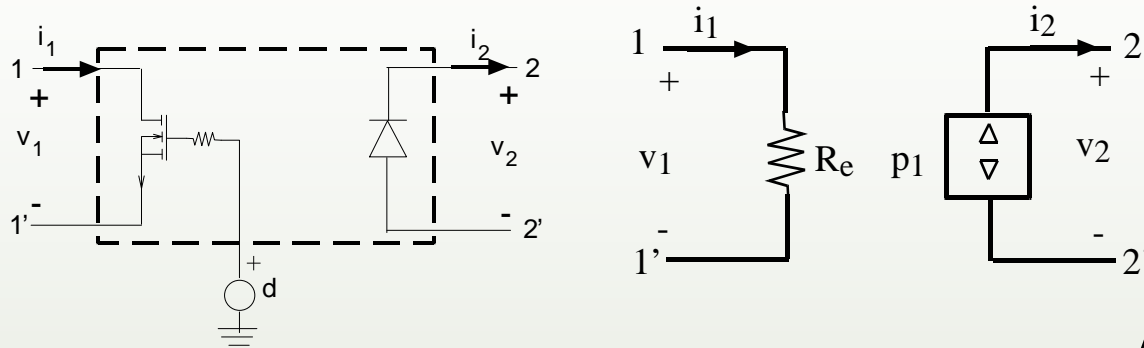
$$\frac{d \langle i_L \rangle}{dt} = \frac{(1-m) \langle v_{12} \rangle - \langle v_{13} \rangle}{L}$$

$$\frac{d \langle v_{12} \rangle}{dt} = - \frac{(1-m) \langle i_L \rangle}{C} - \frac{\langle v_{12} \rangle}{RC}$$

Aparece L en el modelo, permite que i_L cambie en sucesivos periodos, pero no dentro de cada periodo, la tensión de salida no cambia dentro de cada periodo.

Orden completo (V)

Modelo de resistencia sin pérdidas (ejemplo Boost, pero el resultado es generalizado)



$$d_2 = d \frac{\langle v_g \rangle}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle}$$

$$\langle v_1 \rangle = \langle v \rangle d_2 + \langle v_g \rangle (1 - d - d_2)$$

$$\langle v_2 \rangle = \langle v \rangle d + (\langle v \rangle - \langle v_g \rangle) (1 - d - d_2)$$

$$\langle i_1 \rangle = \frac{\langle v_g \rangle d^2 T}{2L}$$

$$\langle i_2 \rangle = \frac{\langle v_g \rangle d d_2 T}{2L}$$

$$\langle v_1 \rangle = \langle v_g \rangle$$

$$\langle v_2 \rangle = \langle v \rangle - \langle v_g \rangle$$

$$\langle i_2 \rangle = \frac{\langle v_g \rangle^2}{\langle v \rangle - \langle v_g \rangle} \frac{d^2 T}{2L}$$

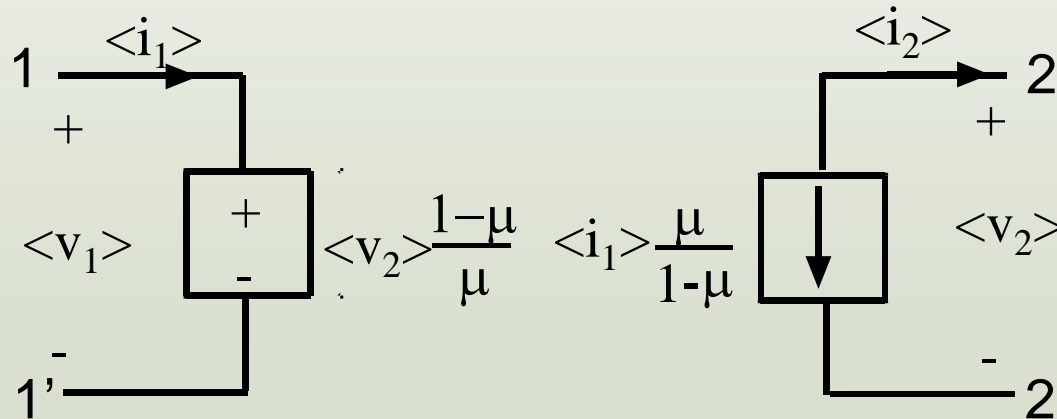
$$R_e = \frac{2L}{d^2 T}$$

Orden completo (VI)

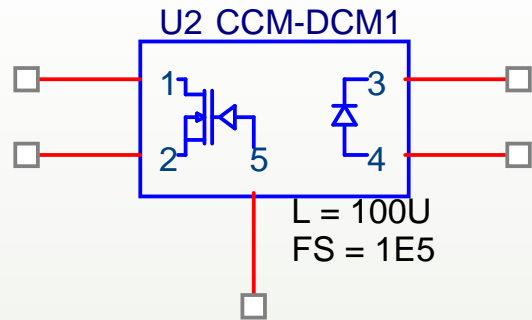
Modelo de resistencia sin pérdidas

$$\langle v_1 \rangle = R_e \langle i_1 \rangle \quad R_e = \frac{2L}{d^2 T} \quad \langle v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \frac{\mu}{1-\mu} \quad \langle v_2 \rangle = R_e \langle i_1 \rangle \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$\mu = \frac{\langle v_2 \rangle}{R_e \langle i_1 \rangle + \langle v_2 \rangle} \quad \mu = \frac{d^2}{\frac{2L f_s \langle i_1 \rangle}{\langle v_2 \rangle} + d^2} \quad \mu = \frac{m}{1-m}$$



Orden completo (VII)

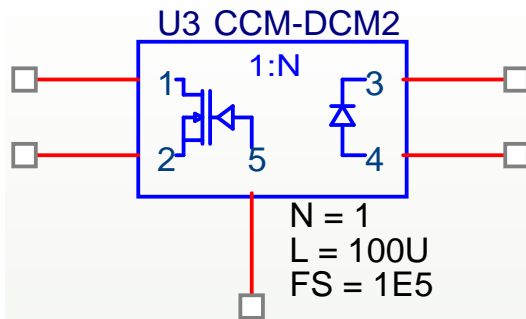


Tomado de ref. 8:
 R.W. Erickson, D. Maksimovic.
Fundamentals of Power Electronics 2nd edition. Kluwer Academic Publishers. 2001

```

*****
*****
* MODEL: CCM-DCM1
* Application: two-switch PWM converters, CCM or DCM
* Limitations: ideal switches, no transformer
*****
* Parameters:
*     L=equivalent inductance for DCM
*     fs=switching frequency
*****
* Nodes:
* 1: transistor positive (drain of an n-channel MOS)
* 2: transistor negative (source of an n-channel MOS)
* 3: diode cathode
* 4: diode anode
* 5: duty cycle control input
*****
.subckt CCM-DCM1 1 2 3 4 5
+ params: L=100u fs=1E5
Et 1 2 value={(1-v(u))*v(3,4)/v(u)}
Gd 4 3 value={(1-v(u))*i(Et)/v(u)}
* Ga 0 a value={MAX(i(Et),0)}
Ga 0 a value={i(Et)}
Va a b
Ra b 0 10k
Eu u 0 table {MAX(v(5),
+ v(5)*v(5)/(v(5)*v(5)+2*L*fs*i(Va)/v(3,4)))} (0 0) (1 1)
.ends
    
```

Orden completo (VIII)



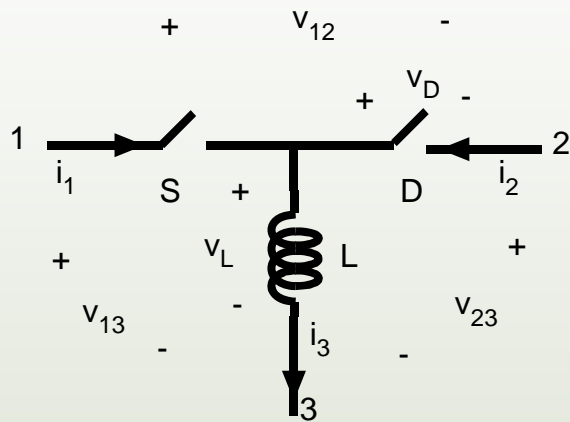
Tomado de ref. 8:
 R.W. Erickson, D. Maksimovic.
Fundamentals of Power Electronics 2nd edition. Kluwer Academic Publishers. 2001

```

*****
*****
* MODEL: CCM-DCM2
* Application: two-switch PWM converters, CCM or DCM
*               with (possibly) transformer
* Limitations: ideal switches
*****
* Parameters:
*   L=equivalent inductance for DCM,
*   referred to primary
*   fs=switching frequency
*   n=transformer turns ratio 1:n (primary:secondary)
*****
* Nodes:
* 1: transistor positive (drain of an n-channel MOS)
* 2: transistor negative (source of an n-channel MOS)
* 3: diode cathode
* 4: diode anode
* 5: duty cycle control input
*****
.subckt CCM-DCM2 1 2 3 4 5
+params: L=100u fs=1E5 n=1
Et 1 2 value={(1-v(u))*v(3,4)/v(u)/n}
Gd 4 3 value={(1-v(u))*i(Et)/v(u)/n}
* Ga 0 a value={MAX(i(Et),0)}
Ga 0 a value={i(Et)}
Va a b
Ra b 0 10K
Eu u 0 table {MAX(v(5),
+ v(5)*v(5)/(v(5)*v(5)+2*L*n*fs*i(Va)/v(3,4)))}(0 0) (1 1)
.ends
    
```

Modelo continuo (I)

Se trata de obtener d_2 sin que intervenga $\langle v_o \rangle$, de esta forma v_o puede variar dentro del periodo.



$$\langle v_L \rangle = \langle v_{13} \rangle d + \langle v_{23} \rangle d_2 = L \frac{d \langle i \rangle_3}{dt}$$

$$\langle i_1 \rangle = \langle i_3 \rangle \frac{d}{d + d_2}$$

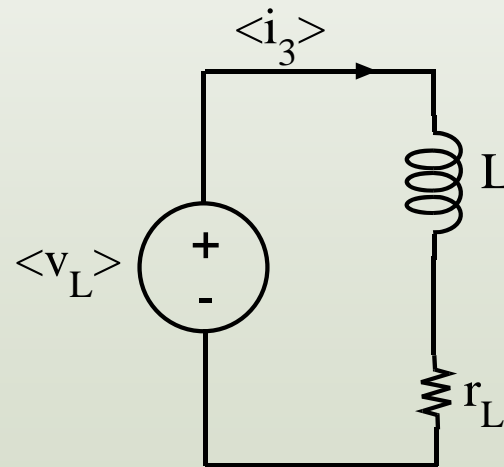
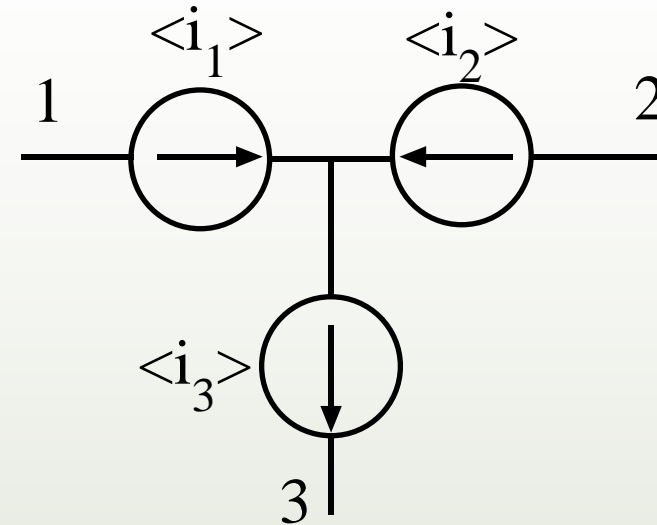
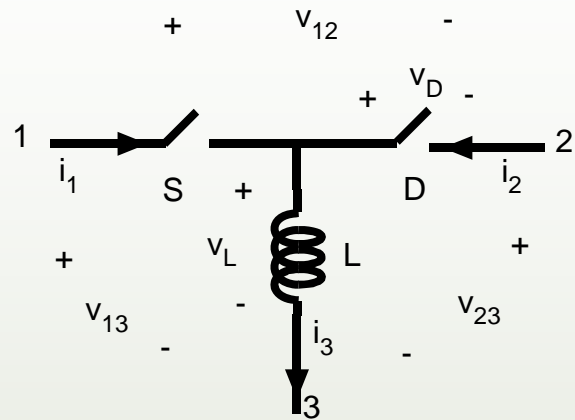
$$\langle i_2 \rangle = \langle i_3 \rangle \frac{d_2}{d + d_2}$$

~~$$d_2 = - \frac{\langle v_{13} \rangle}{\langle v_{23} \rangle} d$$~~

$$d_2 = \frac{2 \langle i_3 \rangle L}{v_{13} dT} - d$$

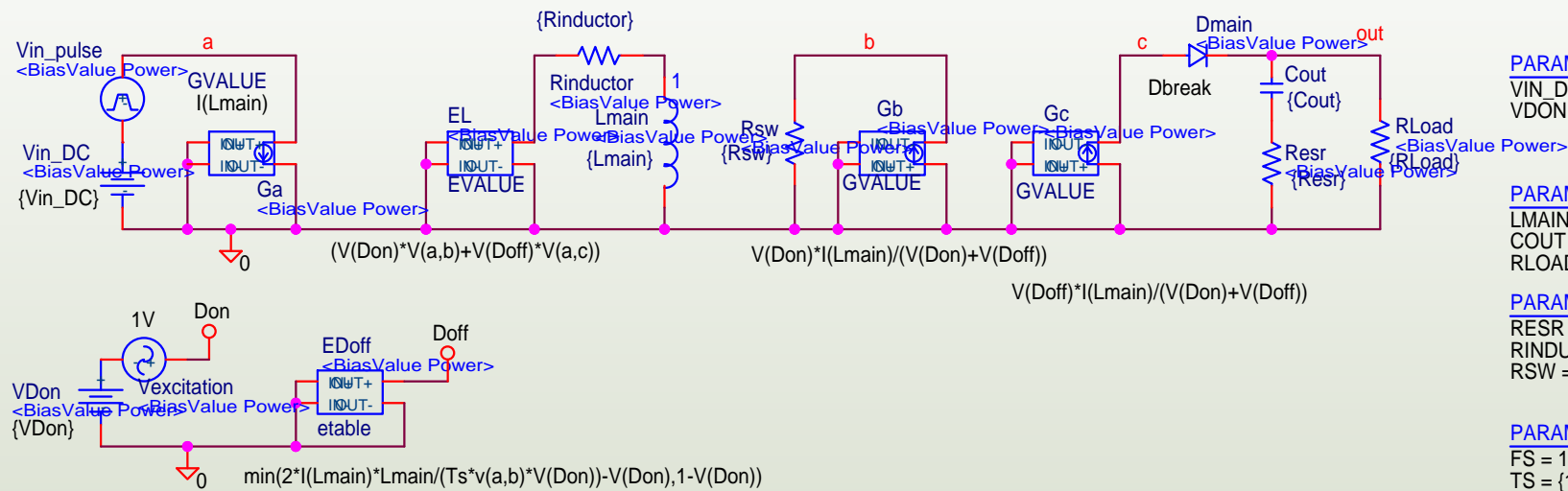
$\langle i_3 \rangle$ se obtiene integrando $\langle v_L \rangle$

Circuito equivalente



SIM-Model under CCM & DCM for PWM Boost converter

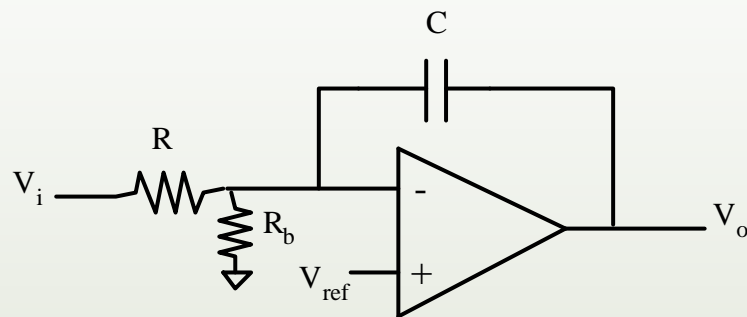
Boost.sch



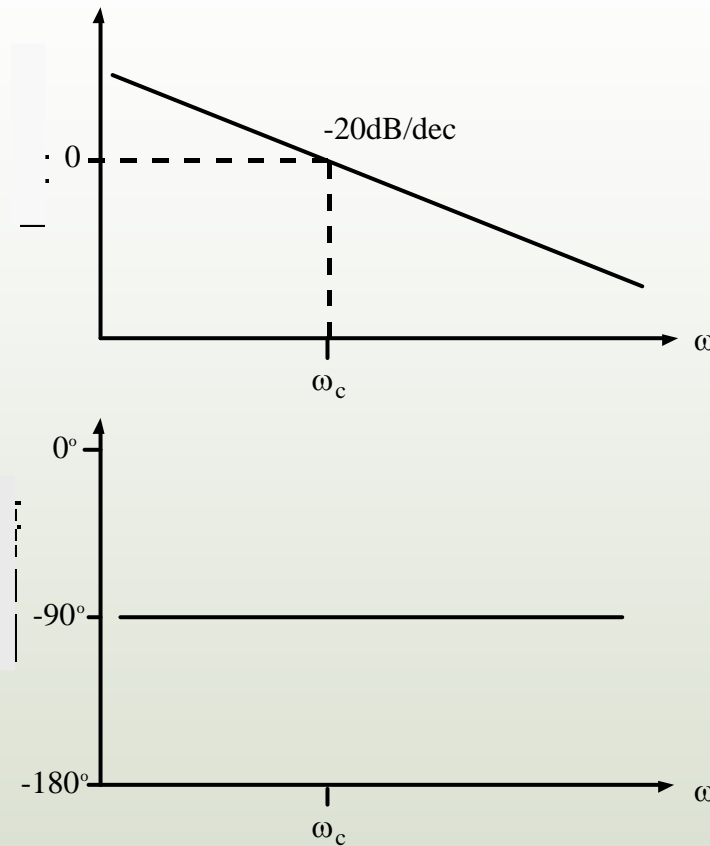
Tomado de Ref. 9:
 S. Ben Yaakov "Computer aided design of power factor correction systems" Professional education seminars workbook. Vol. III. Seminar 11. APEC`03

Reguladores lineales (I)

Tipo 1

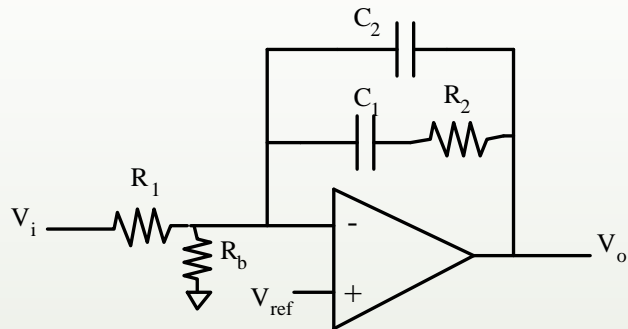


$$G_c(s) = \frac{1}{RCs} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$



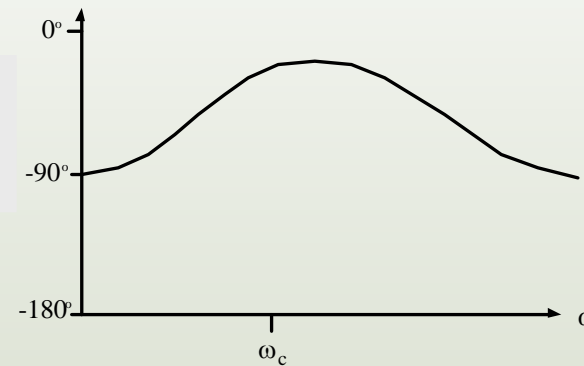
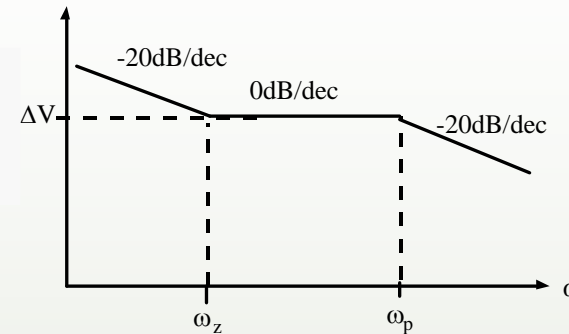
Reguladores lineales (II)

Tipo 2



$$G_c(s) = \frac{1}{(C_1 + C_2)R_1} \frac{sC_1R_2 + 1}{s \left[s \frac{C_1C_2R_2}{(C_1 + C_2)} + 1 \right]}$$

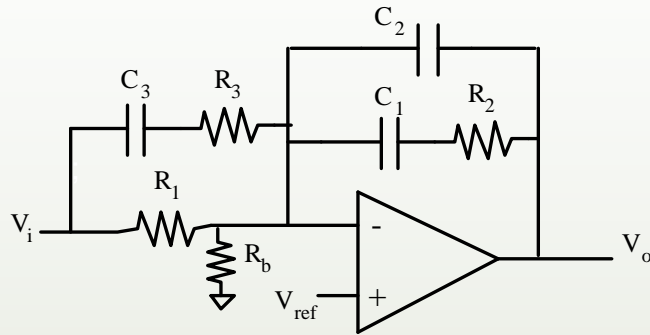
$$\omega_z = \frac{1}{R_2C_1} \quad \omega_p = \frac{1}{R_2} \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2} \quad \Delta V = \frac{C_1R_2}{(C_1 + C_2)R_1}$$



En este regulador $\omega_z < \omega_p$ y para ello $C_2 \ll C_1$, por lo que $\omega_p \cong \frac{1}{R_2C_2}$ $\Delta V \cong \frac{R_2}{R_1}$

Reguladores lineales (III)

Tipo 3



$$G_c(s) = \frac{1}{(C_1 + C_2)R_1} \frac{(sC_1R_2 + 1)[sC_3(R_1 + R_3) + 1]}{s \left[s \frac{C_1C_2R_2}{(C_1 + C_2)} + 1 \right] (sC_3R_3 + 1)}$$

$$\omega_{z1} = \frac{1}{R_2C_1}$$

$$\omega_{z2} = \frac{1}{(R_1 + R_3)C_3}$$

$$\omega_{p1} = \frac{1}{R_3C_3}$$

$$\omega_{p2} = \frac{1}{R_2} \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}$$

$$\Delta V_1 = \frac{C_1R_2}{(C_1 + C_2)R_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{(C_1R_2)[C_3(R_1 + R_3)]}{(C_3R_3)[(C_1 + C_2)R_1]}$$

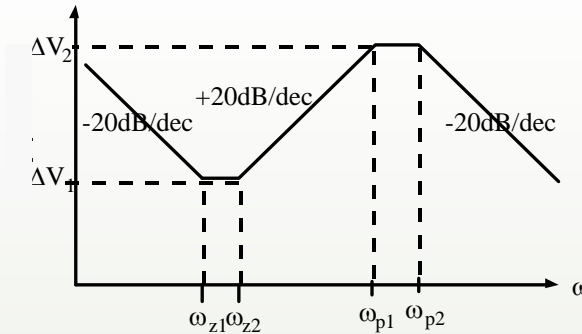
$$\omega_z < \omega_p \implies C_2 \ll C_1$$

$$\omega_{p2} \cong \frac{1}{R_2C_2}$$

$$\Delta V_1 \cong \frac{R_2}{R_1}$$

$$\Delta V_2 \cong \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1R_3}$$

$$\text{si } R_3 \ll R_1 \text{ entonces } \Delta V_2 \cong \frac{R_2}{R_3}$$



Reguladores lineales (IV)



Cálculo del regulador en función del factor k

La frecuencia de corte a la que la ganancia global $G(s)G_c(s)$ deberá tener ganancia unidad es ω_{co} . Para obtener el máximo margen de fase . $\omega_{co} = \sqrt{\omega_z \omega_p}$

Tomando en el regulador de tipo 3 $\omega_{z1}=\omega_{z2}=\omega_z$ y $\omega_{p1}=\omega_{p2}=\omega_p$, se define tanto para el regulador tipo 2 como para el tipo 3 $\frac{\omega_{co}}{\omega_z} = \frac{\omega_p}{\omega_{co}} = k$

Regulador tipo 2

El adelanto de fase provocado por el cero en ω_{co} es . $\theta_{ld} = \tan^{-1} k$
El retraso de fase provocado por el polo en ω_{co} es . $\theta_{lag} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \right)$
El retraso total de la función $G_c(s)$ es . $\theta_{G_c(s)} = 90^\circ - \tan^{-1} k + \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \right)$

Conocido el retraso debido a la etapa de potencia y filtro $G(s)$, y adoptando un valor para el margen de fase, MF se obtiene el valor del factor k de: $\theta_{G(s)} + \theta_{G_c(s)} + MF \leq 180^\circ$

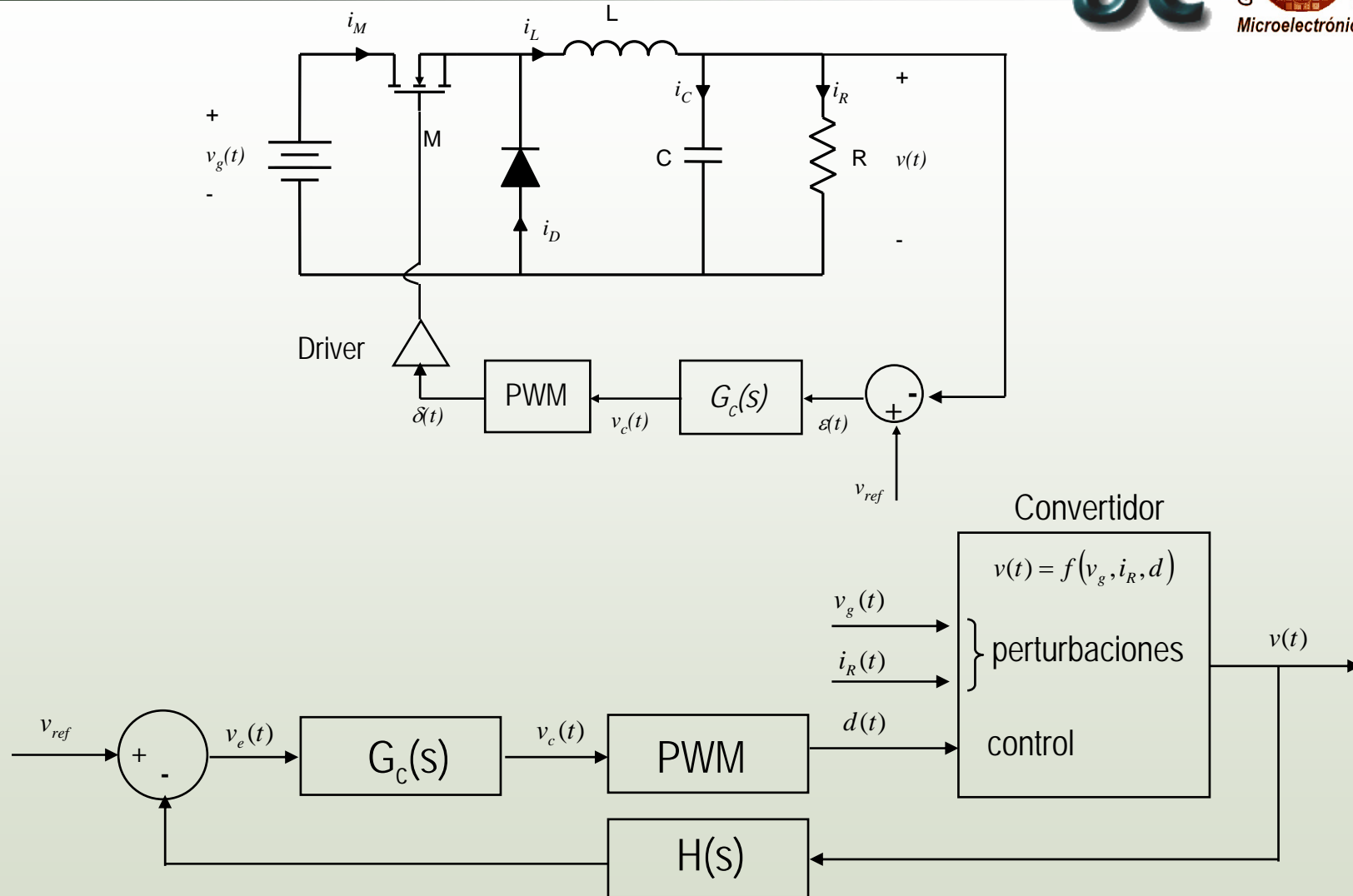
El MF aumenta si se elige un valor de k superior. El factor k sitúa las frecuencias ω_z y ω_p y por tanto los valores de los componentes del regulador. La ganancia de $H(s)$ tiene que ser tal que a ω_{co} $G(s)G_c(s)H(s)=0dB$

Regulador tipo 3

El adelanto de fase provocado por el cero doble en ω_{co} es $\theta_{ld} = 2 \tan^{-1} k$
El retraso de fase provocado por el polo doble en ω_{co} es . $\theta_{lag} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \right)$
El retraso total de la función $G_c(s)$ es . $\theta_{G_c(s)} = 90^\circ - 2 \tan^{-1} k + 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{k} \right)$

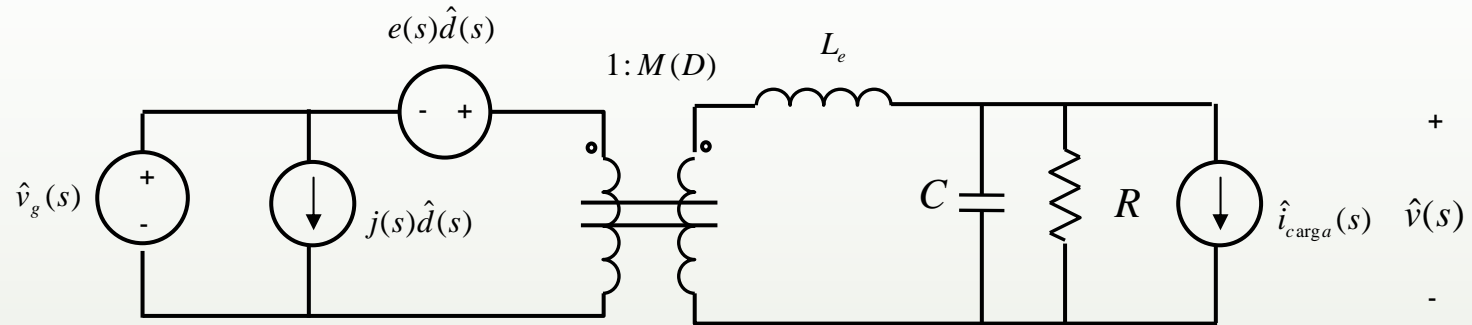
El MF aumenta si se elige un valor de k superior. El factor k sitúa las frecuencias ω_z y ω_p y por tanto los valores de los componentes del regulador. La ganancia de $G_c(s)$ tiene que ser tal que a ω_{co} $G(s)G_c(s)H(s)=0dB$

Ejemplo de diseño (I)



Ejemplo de diseño (II)

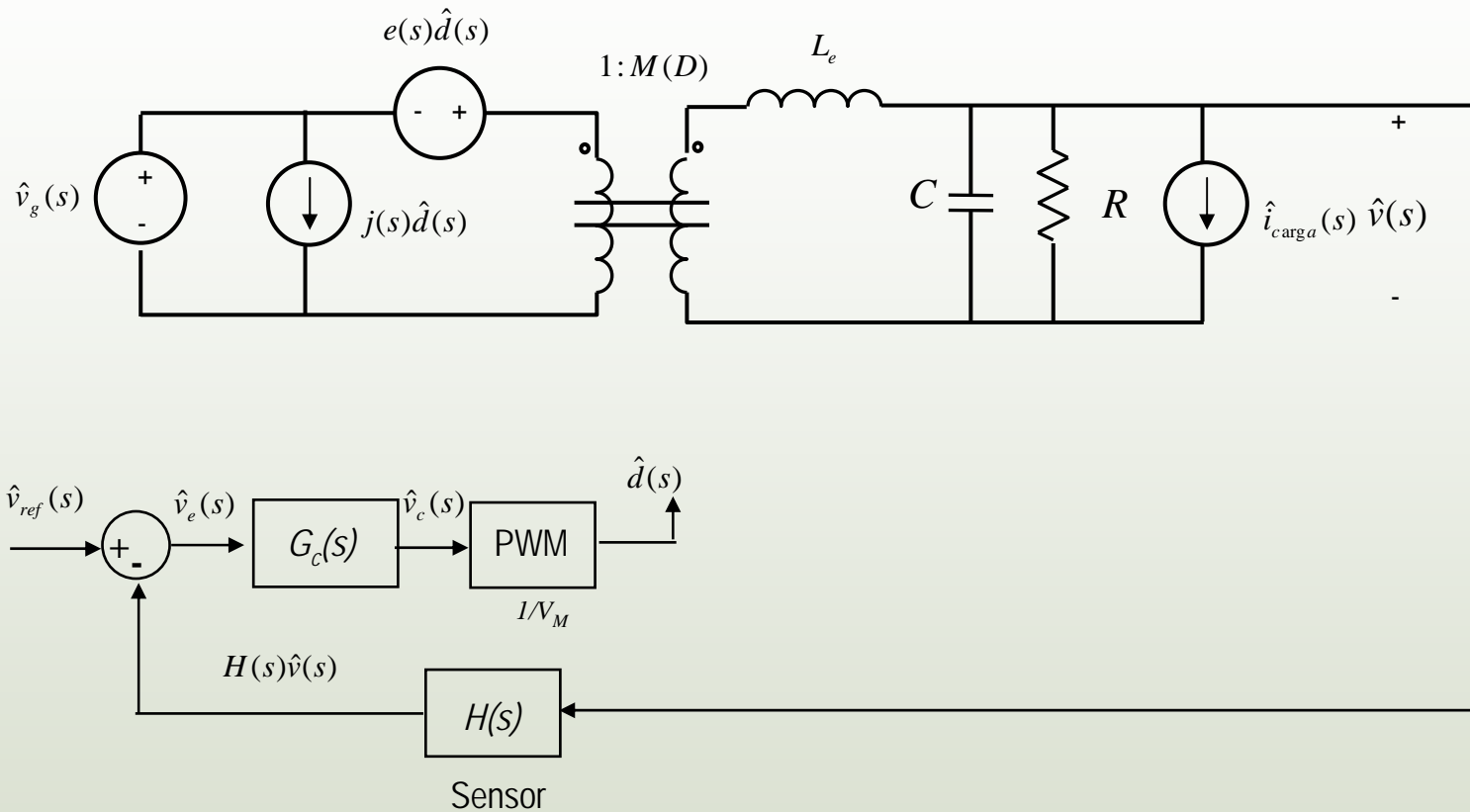
Modelo en pequeña señal



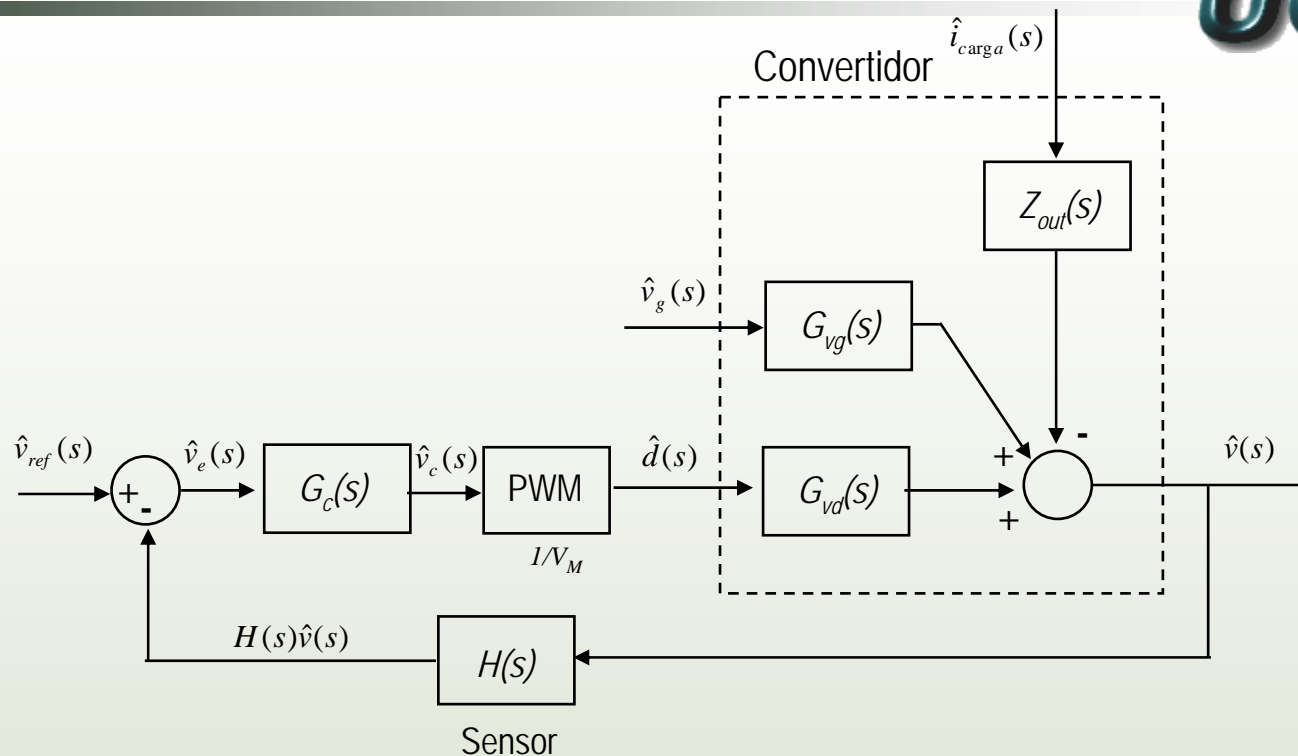
$$\hat{v}(s) = G_{vd}(s)\hat{d}(s) + G_{vg}(s)\hat{v}_g(s) - Z_{out}\hat{i}_{carga}(s)$$

$$G_{vd}(s) = \left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{d}(s)} \right|_{\substack{\hat{v}_g=0 \\ \hat{i}_{carga}=0}} \quad G_{vg}(s) = \left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{v}_g(s)} \right|_{\substack{\hat{d}=0 \\ \hat{i}_{carga}=0}} \quad Z_{out}(s) = - \left. \frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}_{carga}(s)} \right|_{\substack{\hat{d}=0 \\ \hat{v}_g=0}}$$

Ejemplo de diseño (III)



Ejemplo de diseño (IV)



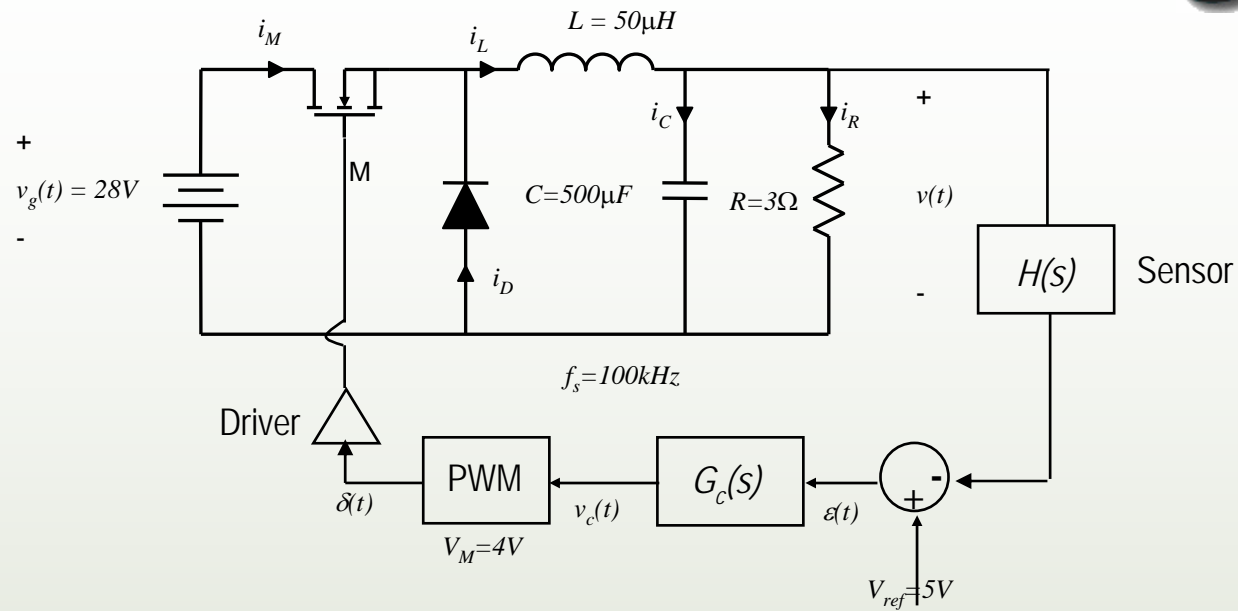
$$\hat{v}(s) = \hat{v}_{ref}(s) \frac{G_c(s)G_{vd}(s)/V_M}{1 + H(s)G_c(s)G_{vd}(s)/V_M} + \hat{v}_g \frac{G_{vg}}{1 + H(s)G_c(s)G_{vd}(s)/V_M} - \hat{i}_{carga} \frac{Z_{out}}{1 + H(s)G_c(s)G_{vd}(s)/V_M}$$

$$\hat{v}(s) = \hat{v}_{ref}(s) \frac{1}{H(s)} \frac{T(s)}{1 + T(s)} + \hat{v}_g \frac{G_{vg}}{1 + T(s)} - \hat{i}_{carga} \frac{Z_{out}}{1 + T(s)}$$

$$T(s) = H(s)G_c(s)G_{vd}(s)/V_M$$

Ganancia del bucle

Ejemplo de diseño (V)



En régimen permanente

$$V_g = 28V$$

$$V = 15V, I_R = 5A$$

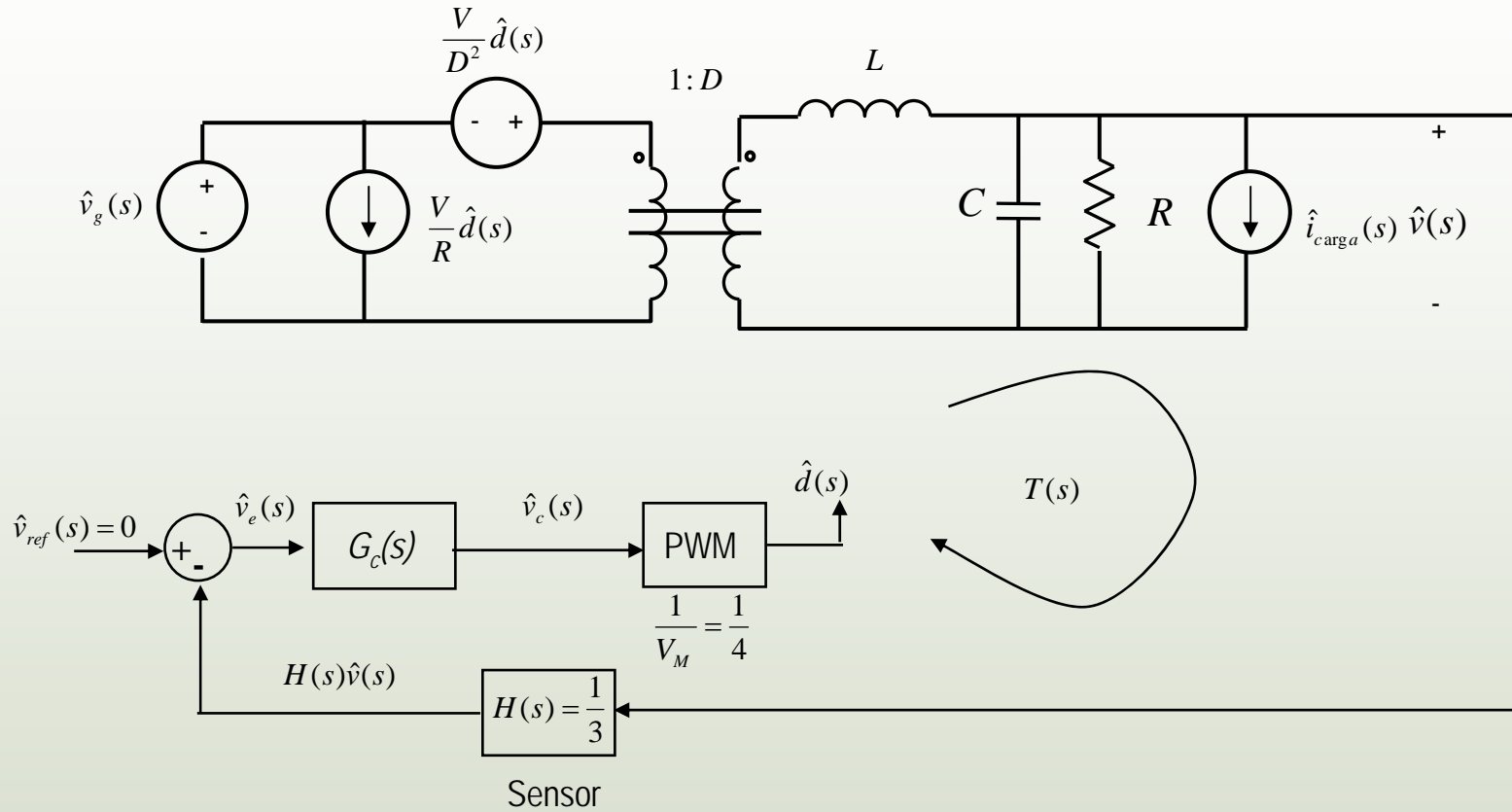
$$D = 15/28 = 0,536$$

$$V_{ref} = 5V$$

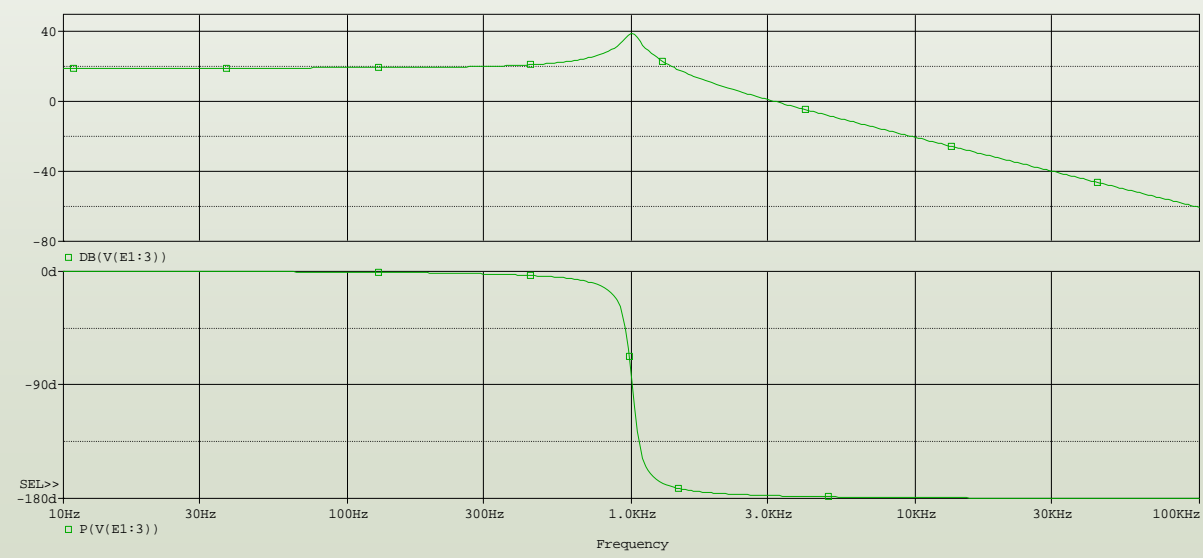
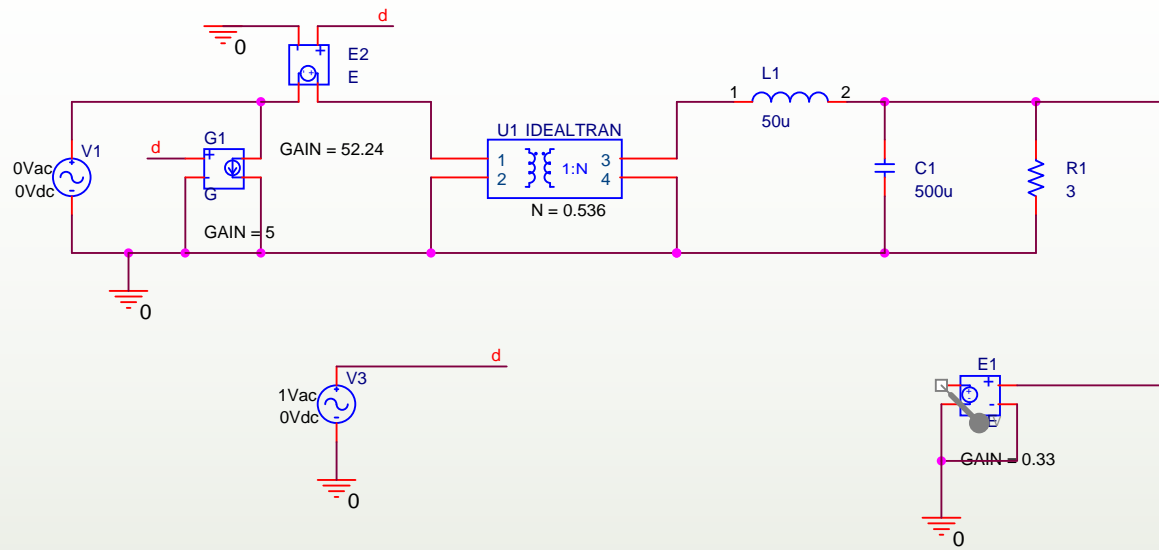
$$V_c = DV_M = 2,14V$$

$$H = V_{ref}/V = 5/15 = 1/3$$

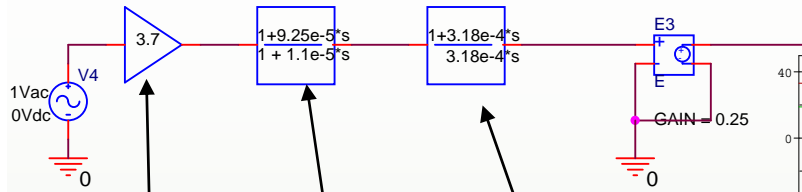
Ejemplo de diseño (VI)



Ejemplo de diseño (VII)



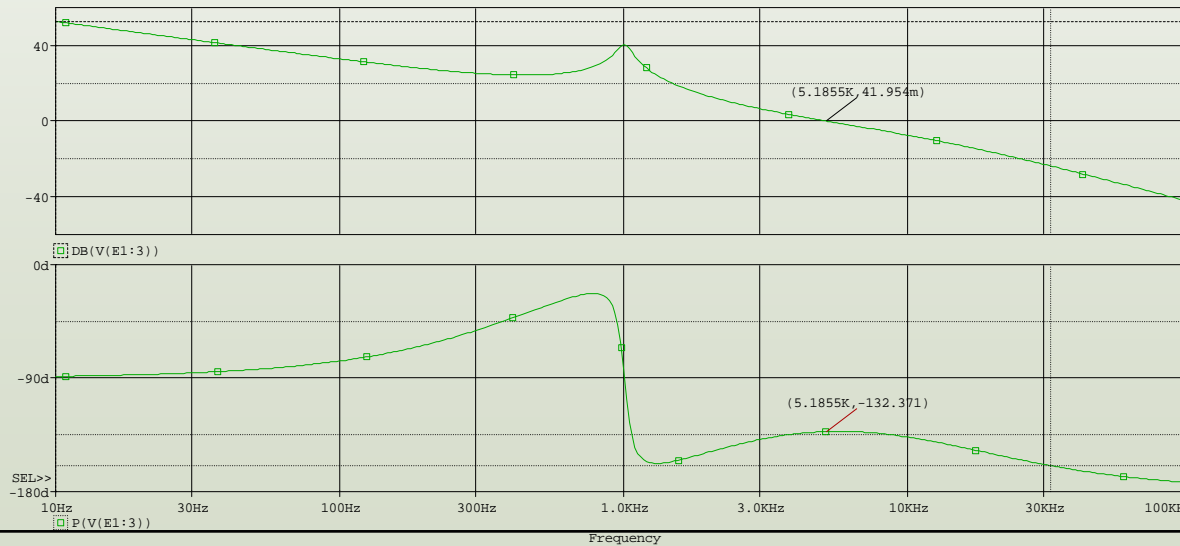
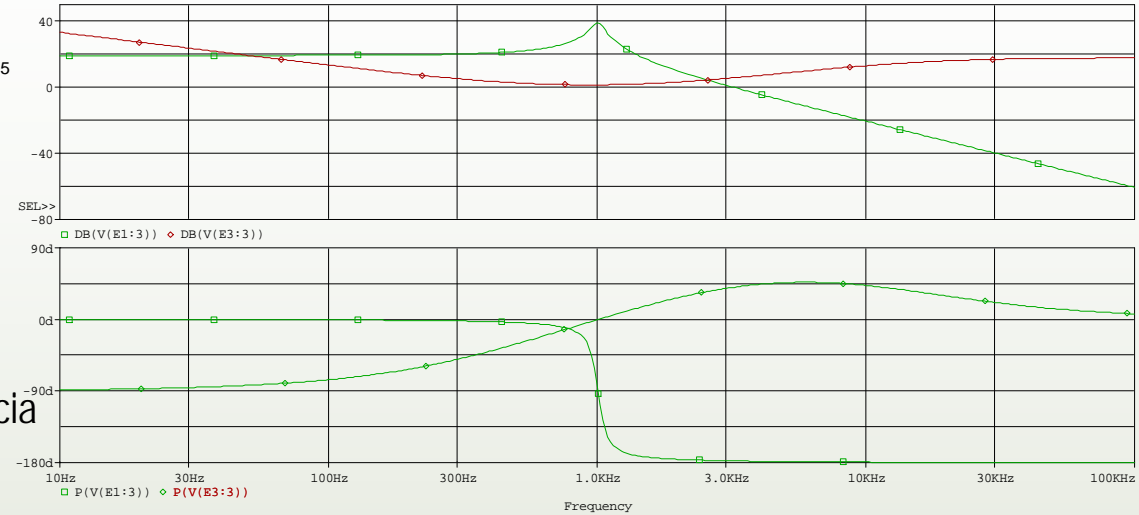
Ejemplo de diseño (VIII)



Ganancia
0dB a ω_{CO}

Cero + polo
Margen de fase

Polo en el origen + cero
Alta ganancia a baja frecuencia



Comportamiento en pequeña señal de las fuentes conmutadas

Conclusiones comentarios finales



- 1.- Los convertidores conmutados son procesadores digitales de energía
- 2.- Para tratarlos como sistemas LTI se debe trabajar con un ancho de banda suficientemente inferior a la frecuencia de conmutación.
- 3.- El modelado promedio permite tratar un sistema conmutado como un sistema continuo, pero hace perder información sobre distorsión y desfase.
- 4.- Para obtener una buena regulación se requiere analizar la función de transferencia de todo el lazo de regulación, $T(s)$, para:
 - Obtener la más alta frecuencia de corte, compatible con el punto 2.
 - Margen de fase de al menos 50° para evitar respuestas oscilatorias
 - Alta ganancia de $T(s)$ a baja frecuencia, para reducir el error y el efecto de las perturbaciones
- 5.- Una buena regulación requiere una buena referencia, inmune a ruido, temperatura, etc...
- 6.- Además de regular en modo tensión, es habitual utilizar la regulación en modo corriente y un doble bucle; modo corriente interno y modo tensión externo que puede dotar al sistema de mayor robustez con reguladores sencillos.
- 7.- En determinados sistemas es interesante plantear un control en modo potencia.
- 8.- Se puede obtener un ancho de banda de mayor frecuencia utilizando reguladores no lineales, p.e. One cycle control.
- 9.- Para realizar reguladores digitales sin mayores prestaciones que los analógicos, cabe traducir la función de transferencia del modelo promediado del dominio s al dominio z diseñar el regulador correspondiente considerando el retraso de fase del tiempo de actualización de dato.
- 10.- Para obtener mayores prestaciones cabe tratar directamente la fuente conmutada como un sistema digital y diseñar reguladores digitales no lineales.

Referencias (I)



1. Jian Sun, Daniel M: Mitchell, Matthew F. Greuel, Philip T. Krein and Richard M. Bass. Modeling of PWM Converters in Discontinuous Conduction Mode – A Reexamination. Proc. of the IEEE PESC'98 pp. 615 – 622. 1998
2. Sam Ben – Yaakov, Dov Wulich, William M. Polivka. Resolution of an Averaging Paradox in the Analysis of Switched –Mode DC-DC Converters. IEEE Trans on Aerospace and Electronics Systems. Vol. 30 No. 2 pp.626-632. April 1994
3. Billy Y. Lau and R.D. Middlebrook. Small-Signal Frequency Response Theory for Piecewise-Constant Two-switched-network DC-to-DC Converter Systems IEEE PESC 1986. pp. 186-200.
4. R.D. Middlebrook. Small-Signal Modeling of Pulse-Width Modulated Switched-Mode Power Converters. Proc. Of the IEEE, Vol. 76, No.4 April 1988. Pp.343-354.
5. Dragan Maksimovic and Slobodan Cuk. A Unified Analysis of PWM Converters in Discontinuous Modes. IEEE Trans. on Power Electronics Vol.6 No.3 July 1991. pp.476-490
6. Dragan Maksimovic. Computer-Aided Small-Signal Analysis Based on Impulse Response of DC/DC Switching Power Converters. IEEE Trans. on Power Electronics Vol.15 No.6 Nov. 2000. pp.1183-1191
7. Yim-Shu Lee. *Computer-Aided Analysis and Design of Switch-Mode Power Supplies*. Marcel Dekker 1993.
8. R.W. Erickson, D. Maksimovic. *Fundamentals of Power Electronics 2nd edition*. Kluwer Academic Publishers. 2001
9. S. Ben Yaakov "Computer aided design of power factor correction systems" Professional education seminars workbook. Vol. III. Seminar 11. APEC`03

Referencias (II)



10. N. Mohan, T.M. Undeland, W.P. Robbins. *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. John Wiley & Sons. 1995. 2ª Edición
11. J.G. Kassakian, M.F. Schlecht y G.C. Verghese. *Principles of Power Electronics*. Addison Wesley Publishing Company. 1991
12. Rashid, M.H. *Power Electronics. Circuits, Devices and Applications* . Prentice Hall. 1993, 2ª Edición.
13. Francisco J. Azcondo, Christian Brañas, Rosario Casanueva, Dragan Maksimovic. Approaches to Modeling Converters with Current Programmed Control. Proc. of the 1st Power Electronics Education Workshop, PEEW 2005-PESC05. pp. 98- 104. ISBN: 0-7803-9002-4.
14. P. T. Krein, *Elements of Power Electronics*. New York and Oxford: Oxford University Press, 1998
15. *The Student Edition of MATLAB V.4*. The Math Works. Prentice Hall, 1995
16. *The Student Edition of SIMULINK*. The Math Works. Prentice Hall, 1996